第９８話　フーリエ変換とラプラス変換 No.3

前回では、フーリエ変換とラプラス変換の基本についてお話しした。今回は、特にラプラス変換を用いた振動方程式の解法についての話であるが、式の展開が多いので、ここでは結果とその意味についてのみ示す。

以下の 1 自由度系の振動方程式を用いて、微分方程式をラプラス変換により解析する。ここではまず、その手法の概略を学ぶ。

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t)$$

ここで、m,c,k は各々、質量、減衰、剛性を、ζ は減衰定数を各々表す。上式の両辺をラプラス変換すると、(詳細はテキスト参照)

$$m(s^2Y(s)-sy(0+)-\frac{dy(0+)}{dt})+c(sY(t)-y(0+))+kY(s)=F(s)$$

となる。ここで $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ 、$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ であり、また初期条件として、以下のように初期変位を $y(0+)=y_0$ と初期速度を $dy(0+)/dt=v_0$ とする。初期条件を上式に代入し整理すると、次式が得られる。

$$[ms^2+cs+k]Y(s)=msy_0+mv_0+cy_0+F(s)$$

ここで、$Z(s)=ms^2+cs+k; A(s)=msy_0+mv_0+cy_0$ と置くと、上式は次式となり、さらに伝達関数 $G(s)=1/Z(s)$ を用いると、下式の右となる。

$$Y(s)=\frac{A(s)}{Z(s)}+\frac{F(s)}{Z(s)}\rightarrow Y(s)=G(s)A(s)+G(s)F(s)$$

左の各記号は次式で表される

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad c_{cr}=2\sqrt{mk}$$

$$\zeta=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2m\omega_n}$$

$$c=2\zeta m\omega_n;\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

$$\sigma=\zeta\omega_n$$

従って、解 $y(t)$ はラプラス逆変換によって次式となる。

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[\frac{A(s)}{Z(s)}]+\mathscr{L}^{-1}[\frac{F(s)}{Z(s)}]=\mathscr{L}^{-1}[G(s)A(s)]+\mathscr{L}^{-1}[G(s)F(s)]$$

関数 $Z(s)$ は系固有の特性を表しており、**特性関数あるいはインピーダンス**と呼ばれる。上式の解は、右辺第 1 項の初期条件によってのみ決まる関数と、第 2 項の外力によってのみ決まる関数の和で表される。一般に、$f(t)$ は入力あるいは外力と呼ばれ、その解は出力あるいは応答といわれる。

まず、第 1 項のラプラス逆変換を実施し、その解を求める。初期条件である変位と速度の項のラプラス逆変換は次式となる。

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{ms+c}{Z(s)}]y_0+\mathscr{L}^{-1}[\frac{m}{Z(s)}]v_0=y_0e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t)+\frac{v_0}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

いずれの周期関数も、減衰関数である $e^{-\zeta\omega_n t}$ との積で表されており、この項は時間の経過と共にゼロに収束する。

次に、第 2 項の外力項の逆変換について考える。この項は、$y_0=v_0=0$

の解であり、特解となる。特解は以下のように求められる。

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{F(s)}{Z(s)}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{F(s)}{ms^2+cs+k}]$$

後は、任意関数のラプラス変換である $F(s)$ を求め、その関数を用いて上の関数のラプラス逆変換を行い、応答を求めることになる。

ここでは、外乱として $f(t)=P_0\cos\omega t$ の周期関数を考える。外乱関数 $P_0\cos\omega t$ のラプラス変換は、前回の例題 2 より次式で与えられる。

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)=P_0\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

ここで P_0 は振幅の大きさを表す。上式を特解に代入すると、次式となり、

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{F(s)}{Z(s)}]=P_0\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(ms^2+cs+k)(s^2+\omega^2)}]$$

ラプラス逆変換を行う。ラプラス逆変換はかなり面倒な式展開が必要である。詳細はテキストを参照。最終的な結果は以下のようになる。

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{F(s)}{Z(s)}]=\frac{P_0}{m}\{e^{-\sigma t}\sqrt{p_1^2+(\frac{p_0-p_1\sigma}{\omega_d})^2}\cos(\omega_d t-\phi_d)\}$$
$$+P_0\sqrt{q_1^2+q_0^2/\omega^2}\cos(\omega t-\phi)]$$

$$\tan\phi_d=\frac{p_0-p_1\sigma}{\omega_d p_1};\quad \tan\phi=\frac{q_0}{\omega q_1}$$

ここで、

$$q_1=\frac{1}{m}\cdot\frac{-(\omega^2-\omega_n^2)}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2};\quad q_0=\frac{1}{m}\cdot\frac{2\zeta\omega_n\omega^2}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

$$p_1=\frac{(\omega^2-\omega_n^2)}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2};\quad p_0=\frac{1}{m}\cdot\frac{-2\zeta\omega_n\omega^2}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

上式の第 1 項は、自由振動の解を表し、減衰項である $e^{-\zeta\omega_n t}$ が掛かっている。そのため、やがてこの自由振動は消滅し、定常振動状態となる。この自由振動と定常応答が重なって現れる状態が**過渡応答**と呼ばれる。第 2 項は定常解を表し、応答の角振動数は外乱の角振動数 ω と同一であり、外乱との位相の遅れ ϕ を生じている。この項の係数は定常解の応答特性を表しており、以下のように周波数応答関数と同じとなる。

$$P_0\sqrt{q_1^2+q_0^2/\omega^2}=P_0\sqrt{(\frac{1}{m}\cdot\frac{-(\omega^2-\omega_n^2)}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2})^2+(\frac{1}{m\omega}\cdot\frac{2\zeta\omega_n\omega^2}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2})^2}$$
$$=\frac{P_0}{m}\sqrt{\frac{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}{((\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2)^2}}=\frac{P_0}{m}\sqrt{\frac{1}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}=\frac{P_0}{k}\sqrt{\frac{1}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

$$\tan\phi=\frac{q_0}{\omega q_1}=\frac{\frac{1}{m\omega}\cdot\frac{2\zeta\omega_n\omega^2}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{-(\omega^2-\omega_n^2)}{(\omega^2-\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}=\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$