第９７話　フーリエ変換とラプラス変換 No.2

前回に引き続いて、フーリエ変換とラプラス変換についてお話しする。今回は、ラプラス変換の意味と特徴について学ぶ。ピエール・シモン・ラプラス(Pierre-Simon Laplace;1749−1827)はフランスの数学者・物理学者・天文学学者であり、ラプラス変換(Laplace transform)は彼の名前から採られている。

フーリエ変換には、次の制限$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$があり、必ずしも全ての関数がフーリエ変換できるとは限らない。例えば、応答解析で良く用いられる単位ステップ関数$u_s(t)=1$は、

$$\int_0^{\infty}|u_s(t)|dt=\int_0^{\infty}1\,dt=[t]_0^{\infty}=\infty$$

となり、制限条件を満足せず、フーリエ変換できない。そこで、全ての関数をフーリエ変換できるように変換方法を拡張する。積分値が無限大となるような関数に対し、収束関数$e^{-\sigma t}$を掛け、$v(t)=x(t)e^{-\sigma t};\quad \sigma>0$とすることで対処する。この関数は振動における減衰項と同様、$t\to\infty$となるとき、$v(t)$は$\to 0$となる。また、$\sigma\to 0$の場合、$e^{-\sigma t}\to 1$となり、σが非常に小さいと$v(t)$は$x(t)$に限りなく近似する。従って、次式のように関数を変形することで制限を回避し、フーリエ変換が可能となる。

$$\int_0^{\infty}|v(t)|dt=\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-\sigma t}\right|dt<\infty$$

任意の関数のフーリエ変換を行うために、収束関数を掛けた後、フーリエ変換を行うと次のようになり、変換が可能となる。

$$X(\sigma,\omega)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt=\int_0^{\infty}x(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$$

ここで、複素数sを$s=\sigma+i\omega$と置くと上式は次式となる。この変換形式は**関数$x(t)$のラプラス変換**と呼ばれる。

$$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

また、同式の逆変換であるラプラス逆変換は下式で表される。**変換後の領域をフーリエ変換では周波数領域と呼ぶが、ラプラス変換ではs領域と呼ぶ。**

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}X(s)e^{st}ds$$

上のラプラス変換とラプラス逆変換は、次の記号を用いて表すことがある。

$$\mathscr{L}[x(t)]=X(s);\quad x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]$$

複素変数sにおいて$\sigma=0$の場合がフーリエ変換に相当し、この場合、

過渡的な現象を考慮しておらず、システムの周波数特性を表す。つまり、フーリエ変換は、無限に続く不規則波形の周波数分布を求めるものであり、一方、ラプラス変換は過渡応答を含むなど、より広い意味を持ち、実用的な変換方法となっている。ラプラス変換はフーリエ変換の自然な拡張版であるといえる。簡単な例題で、ラプラス変換を実感しよう。

例題 1： $t<0$ でゼロとなる指数関数 $e^{-\alpha t}$ をラプラス変換せよ。ただし、α は実数とする。 定義に従って以下のように積分する。

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt=\left[-\frac{1}{(s+\alpha)}e^{-(s+\alpha)t}\right]_0^\infty$$

$$=-\frac{1}{(s+\alpha)}e^{-(s+\alpha)\infty}+\frac{1}{(s+\alpha)}e^{-(s+\alpha)0}=-\frac{1}{(s+\alpha)}e^{-(s+\alpha)\infty}+\frac{1}{(s+\alpha)}$$

上式右辺の第 1 項は、$s=\sigma+i\omega$ であることから、$\sigma+\alpha>0\rightarrow\alpha>-\sigma$ であれば、$e^{-(\sigma+\alpha+i\omega)t}\Big|_{t\to\infty}=0$ となる。結果、指数関数のラプラス変換は次式で表すことができる。

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}]=\frac{1}{(s+\alpha)} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

例題 2：正弦波と余弦波のラプラス変換を求めよ。

オイラーの公式を利用すると、正弦波のラプラス変換は次式となる。

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})e^{-st}dt=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{-(s-i\omega)t}-e^{-(s+i\omega)t})dt$$

さらに、上式の指数関数の積分は、式(1)を考慮すると次式となり、結果、正弦波のラプラス変換式が次のように得られる。

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{-(s-i\omega)t}-e^{-(s+i\omega)t})dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{s+i\omega-(s-i\omega)}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

同様に、余弦波のラプラス変換は次式となる。

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{-(s-i\omega)t}+e^{-(s+i\omega)t})dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{s+i\omega+(s-i\omega)}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

例題 3：指数関数の積で表される関数 $e^{-\sigma t}e^{i\omega t}$ のラプラス変換を求めよ。

関数 $e^{-\sigma t}e^{i\omega t}$ のラプラス変換を行う際、例題 2 で求めた正弦波と余弦波が出現する。そこで s を $s+\sigma$ と置くことによって下式が得られる。

$$\mathscr{L}[e^{-\sigma t}e^{i\omega t}]=\int_0^\infty e^{-\sigma t}(\cos\omega t+i\sin\omega t)e^{-st}dt=\int_0^\infty(\cos\omega t+i\sin\omega t)e^{-(s+\sigma)t}dt$$

$$=\int_0^\infty(\cos\omega t\cdot e^{-(s+\sigma)t}dt+i\int_0^\infty(\sin\omega t\cdot e^{-(s+\sigma)t}dt=\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$