第９６話　フーリエ変換とラプラス変換 No.1

今回は、構造力学に関連するフーリエ変換とラプラス変換についてお話しする。構造力学では、主に 2 つの分野で両変換を用いる。一つは、地震動など不規則波形に含まれる周波数成分を、つまり、フーリエスペクトルを求めるために使用する。二つ目は、微分方程式の解法で使用する。ここでは両変換の意味と特徴について学ぶ。まず、フーリエ変換についてお話ししよう。

不規則波形の分析は、「地震波のような複雑な波形でも三角関数の集合で表現できる、つまり単純な周期関数の寄せ集めで表現できる」と唱えた数学者フーリエの仕事から始まる。J.B.J.フーリエ（Jean Baptiste Joseph Fourier：1768−1830）は、フランスの数学者・物理学者。固体内での熱伝導の研究から熱伝導方程式を導き、フーリエ解析と呼ばれる理論を展開した。フーリエ解析は複雑な周期関数をより簡単に記述でき、音や光といった波動の研究にも広く用いられる。

左に出てくる無限積分を、ここでは余り難しく考えずに、記号だと思えば良い。実際に積分が必要な時は、既に積分され、表にまとめられている。その表から求めることになる。

フーリエ変換(Fourier transform)とは、実数値関数を別の同種の関数に写す変換法である。変換後の関数は元の関数に含まれる周波数特性を評価し、周波数領域の表現（frequency domain representation）と呼ばれる。つまり、不規則波形のスペクトル特性を求めることになる。

関数 $x(t)$ に関する時間領域と周波数領域の関係を与える式として、次の**フーリエ変換対**がある。ここで、i は虚数単位を表す。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt; \quad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

ただし、このフーリエ変換が実施できるためには、関数 $x(t)$ に次の条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|dt<\infty$ が必要となる。例えば、$\sin x$ や $\cos x$ はこの条件を満たさないため、フーリエ変換ができない。

上式の左は、任意の時刻歴 $x(t)$ の**周波数スペクトル**（フーリエスペクトル）を求める式であり、時間領域より周波数領域に変換する意味で**フーリエ変換**と呼ばれる。また、同式の右は周波数スペクトル $X(\omega)$ が与えられるとき、時刻歴波形を求める式であり、**フーリエ逆変換**と呼ばれる。この変換式を次の記号を用いて表すこともある。

$$X(\omega)=\mathscr{F}\left[x(t)\right]; \quad x(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[X(\omega)\right]$$

ここで、$\mathscr{F}[f(x)]$ は関数 $f(x)$ のフーリエ変換を意味し、また、$\mathscr{F}^{-1}\left[X(\omega)\right]$ は、フーリエ逆変換を意味する。

良く使用するフーリエ変換の性質をまとめておこう。ここで使用する

記号 f,g は不規則関数であり、a,b は定数とする。また、$\langle f \mid g \rangle$ は関数 f と g の内積を意味する。

1）**フーリエ変換の線形性**（重ね合わせの原理とも呼ばれる）

$$\mathcal{F}[af+bg]=a\mathcal{F}[f]+b\mathcal{F}[g]$$

フーリエ変換の線形性は基本原理であり、関数の定数倍のフーリエスペクトルは、元の関数のフーリエスペクトルの定数倍に等しく、また、定数倍された関数の和のフーリエスペクトルは、元の関数のフーリエスペクトルを定数倍し、さらに和を採ることで得られる。

2）**変数の定数倍**

$$\mathcal{F}[f(ax)](\omega)=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\omega}{a})$$

3）**時間シフトと周波数シフト**

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\omega)=e^{-\omega a}\mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\omega)=\mathcal{F}[f(x)](\omega-a)$$

上の第 1 式は変数（時間）を a だけシフトし、そのフーリエ変換を行うと、そのフーリエスペクトルはシフトしないフーリエスペクトル $F(\omega)$ に関数 $e^{-i\omega a}$ を掛けた関数となる。第 2 式はフーリエスペクトルを a だけシフトすると、フーリエ変換前の波形はシフト前の関数 $f(x)$ に関数 $e^{i\omega a}$ を掛けた関数となる。

4）**微分**：　$f^n(x)$ は n 回微分を、また $(i\omega)^n$ は n 乗を意味する。

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega)=i\omega\mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f^n(x)](\omega)=(i\omega)^n\mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$(\mathcal{F}[f(x)])'(\omega)=\mathcal{F}[-ixf(x)](\omega)$$

5）**フーリエ変換の対称性**：ある関数にフーリエ変換を行い、逆変換を行うと元の関数になるわけであるが、下式はフーリエ変換を 2 度続けて行うと、$2\pi f(-x)$ となることを意味する。

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]](\omega)=2\pi f(-x)$$

6）**内積の保存**：フーリエ変換前後で内積は保存される。

$$\mathcal{F}\langle f \mid g\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{F}[f] \mid \mathcal{F}[g]\rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

記号 $\langle f \mid g \rangle$ は関数の内積を意味し、無限の積分範囲を有する。

$$\langle f \mid g \rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx$$

ここで、$f^*(x)$ は関数 $f(x)$ の共役関数である。特に、$f(x)=g(x)$ であると、上式は次式となり、**パーセバルの定理**と呼ばれる。下式左の右辺項の変数を角振動数 ω でなく、周波数 f で表すと右式となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2df$$