



## 第95話 動的非線形特性とは何か

今回は、構造物の動的非線形特性についてお話する。近年、大規模なホールやスポーツ施設のような大空間を構成する構造物が数多く建設されるようになった。この種の構造物は静的解析によって設計されるが、実際の荷重は、風や地震など動的な外乱もあり、動的座屈荷重は静的なそれよりも低い場合や、動的現象に特有な不安定挙動を示す場合もある。この種の大型薄肉の大空間構造物を設計する際、これらの動的挙動の広くてより深い知識が必要かつ重要となる。

ここでは、非線形振動の一般的な特徴について概観する。まず、自由振動について述べる。自由振動状態における振幅と振動数あるいは周期との関係は骨格曲線（バックボーンカーブ）として示される。多自由度系では、骨格曲線は固有モードに対する一般化変位で表され、系が線形の場合、直線で一定値となる。一方、非線形系では振幅が大きくなると非線形性が現れて骨格曲線は曲がり、構造形態によって周期が変化する。振幅の増加に従って周期が長くなる系はソフトニング型と呼ばれ、逆に、周期が短くなる系はハードニング型と呼ばれる。構造形態や振動モードによって種々の自由振動特性を有するが、一般に圧縮で力を伝達する系はソフトニング型に、引張で伝達する系はハードニング型となる。例えば、ドームやアーチの上下振動モードでは、下向側の変位ではソフトニング型、逆に上向側ではハードニング型となり、振幅の方向で非対称となる。また、二方向ケーブル構造では両方向ともにハードニング型の振動特性となる。材料非線形によっても骨格曲線は変化し、一般的に材料が塑性域に入るに従って、系全体がソフトニング型となる。

非線形性が強く、骨格曲線が2回以上屈曲すると、周期外乱やステップ荷重あるいは不規則外乱に対して、振動中心が移動し構造物が動的に座屈する可能性が生じる。さらに屈曲が大きくなり、骨格曲線が振動数ゼロに達するような状態となると、静的な座屈を生じることになる。この場合、同じ振動数ゼロの位置に振幅が大きい2つ目の解が存在し、これが静的座屈後の安定状態を表す。

周期型の外乱に対し、非線形性を考慮すると骨格曲線に合わせて、良く知られた共振曲線が得られる。ただし、非線形性を考慮すると、この共振曲線には固有周期近傍の主共振域だけでなく、振動数が固有振動数の1/2、1/3など1/n分数調波で共振域が存在する(図2)。特に振動数1/2の領域で主共振域に次いで大きな応答を示す。また固有振動数の2、

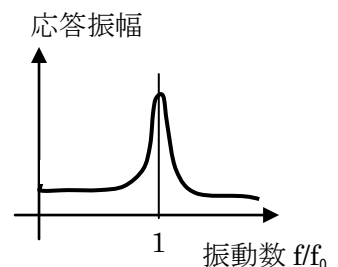


図1 線形系の共振曲線

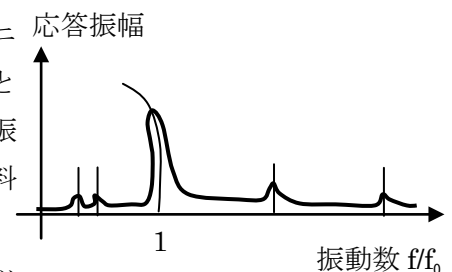


図2 非線形系の共振曲線

3 倍等の高調波にも共振域が存在する。このように固有振動数近傍だけでなく、他の振動数領域でも共振する可能性があり、構造物の振動挙動に影響を与える。骨格曲線（破線）の曲がりによって、共振曲線（実線）は図 3 のように曲がることになる。共振曲線が曲がると周期外乱の定常状態を示す曲線上に不安定域が生じる。一般的に共振曲線で逆勾配を示す共振領域は不安定である。例えば、外乱の振動数を固定し、外乱振幅を徐々に大きくして応答値を求めると、外乱振幅と応答振幅の関係に不連続が生じ（図 3 の A-B）、外乱振幅の増加に対し振幅は急激に大きくなる。この振動挙動は動的ジャンプと呼ばれている。また、加振する振動数を変化させて定常状態を求めるスイープ加振による応答（図 4）でも動的ジャンプが見られる。振幅が小さい場合は、応答は A-A のように通常の共振曲線上を移動するが、振幅が大きい場合、振動数を徐々に高くすると、B-B 線上の c 点で d 点に動的にジャンプする。逆に、加振振動数を徐々に低くすると、e 点でジャンプし、f 点の振幅になる。このように非線形振動では、応答の履歴によって定常応答が変化する。骨格曲線が 2 回以上屈曲すると不安定域が大きくなり、応答振幅が不連続となるだけでなく、振動中心が移動し、構造物は座屈状態を示すことになる（図 5 の A-B'-C）。この現象は動座屈と呼ばれ、骨格曲線が 2 回以上屈曲すると動座屈の可能性を有することになる。

線形であれば、固有振動モードで分解した振動方程式は分離しているため、モード間のエネルギー移動はないが、非線形を考慮すると非線形項で連成するためエネルギーが移動し、モード振幅が増減する。静的解析で分岐座屈を生じる構造物は、動的にも分岐型の座屈を起こす可能性がある。例えば、固有周期間に特別な関係が成立すると Mathieu-Hill 型のパラメトリック励振によってエネルギー移動が起き、結果、非軸対称変位モードが生じ、動座屈を起こすことがある。また、軸対称の変形が大きくなると非軸対称変位モードが大きく発生する場合もある。このような現象が起きる可能性があるにもかかわらず、計算結果で非軸対称変形が生じなかった場合、不整を少し入れて解析を試みると良い。例えば、非軸対称の荷重をほんのわずかだけ付加することでも良いし、あるいは極わずかな非軸対称初期変位を与えても良い。その結果、本来的にエネルギー流入が起こり、変位が急増するような系であれば、自動的に非軸対称変形が励起され、振幅は増大する。逆に、エネルギー移動がほとんど起きないような系では、極わずかな非軸対称荷重や形状初期不整は全体の挙動に影響を与えないことから、不整のない系と何ら変わることはない挙動が得られるはずである。

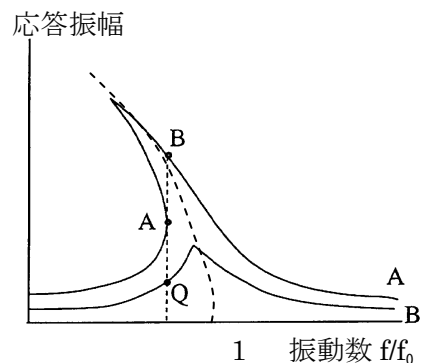


図 3 共振曲線と動的ジャンプ現象

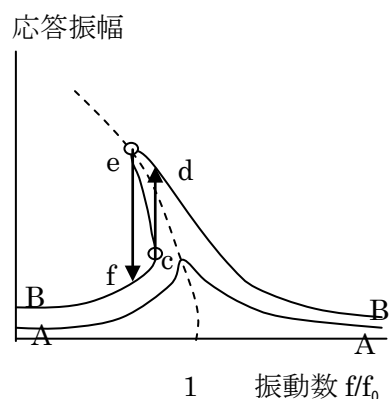


図 4 スウィープ加振

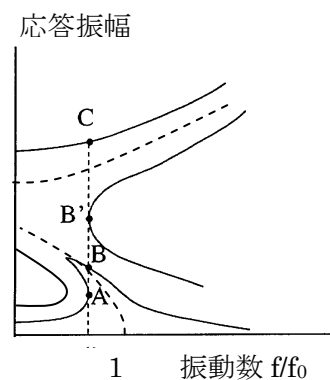


図 5 共振曲線と動座屈現象