



## 第8話 梁理論は優れモノ

今回は梁理論の優れた点についてお話しする。現在でも有意な梁理論は2つあり、一つはベルヌーイ・オイラー梁理論で、2つの仮定：平面保持の仮定と法線保持の仮定から成立する。この理論は単純で理解し易く、また美しく整っている。二つ目はこの梁理論を拡張し、せん断変形を許すティモシェンコ梁理論である。Bernoulli-Euler 梁理論は、曲げ変形を主要項として抽出した理論であり、同じく Timoshenko 梁理論も近似第2項としてせん断変形を加えた理論である。この2種の梁理論は、3次元物体を平面保持や法線保持を仮定して近似した理論であり、適用範囲を知る必要がある。現在でも2つの梁理論は、住宅から超高層ビルまで建築物の発展の基礎となっている。

梁理論によって、断面力である軸力、せん断力、曲げモーメントの概念や、中立軸や断面二次モーメントなどが定義され、骨組内の最大応力や設計位置での応力やひずみが容易に求められる。また、軸方向の剛性や部材が曲げ易いかどうかを、定量的に表すこともでき、梁理論が如何に優れているかが分かる。ただし、梁理論のみでは建築構造の応力解析はできない。現在ではコンピュータ使用を前提とした有限要素法が主流であり、手計算の時代では、たわみ角法と固定法が使用されていた。以下に、後者の特徴から梁理論の優越性について考えてみよう。

たわみ角法(Slope-deflection Method)は、1915年に米国の W. ウイルソンと G. マーニーによって提案されたという説と、それ以前にドイツの A. ベンディクセンによるという説がある。同法は、撓角法と呼ばれることもあり、回転角とたわみ角(部材角ともいう)を未知数として釣合式を構築し、連立方程式により解く方法である。平面骨組としてのラーメンや連続梁を解くための優れた解析法である。特徴として、軸方向変位を考慮せず、全ての未知量が回転方向の変位で表されるため、節点での力の釣合や変位の適合で、座標変換を必要とせず、演算を容易にしている。当然部材内の応力やひずみあるいは材端の剛性などは梁理論より求める。解析対象は、整形ラーメンと異形ラーメンに分けられ、整形ラーメンで用いられる場合が多い。後者では、釣合式は、節点回転角(節点における曲げモーメントの釣合)における節点方程式と、各層のたわみ角(各層の層せん断力の釣合)による層方程式から構成される。さらに、機械的作表法により釣合式が自動的に得られ、間違うことがない。なお、未知変位数は、境界節点を除いた節点数と層数の和で与えられる。

たわみ角法は、部材の伸縮を無視し、節点の移動を部材角という形で表す。利点としては未知数が少なく、また節点における力の釣合や変位の適合では座標変換を行う必要がない。一方、欠点は、部材の伸縮が無視されるため、解析結果から軸力分布が決定できず、節点でのせん断力との力の釣合から求め直す必要がある。大きな欠点として、全部材の部材角は独立に回転することができず、節点が移動するためには部材角間に依存関係が生じる。整形ラーメンでは、この依存関係を表す独立部材角と従属部材角の関係は明確で、独立部材角は各層の層間変形角で表され、しかも梁には部材角は生じない。この特徴を有しない骨組は、異形ラーメンとして分類され、まず部材角間の依存関係を求め、次に仮想仕事の原理より独立部材角の数に対応するモーメントの釣合式を誘導する。今日、たわみ角法はさらに進化し、材端に剛域を有する場合や、せん断変形を考慮した座屈撓角法も提案されている。ただし、たわみ角法の係数そのものがかなり複雑となり、扱い難くなる。

一方、固定法(Cross Moment method)は、1932年米国のハーディ・クロス(Hardy Cross:1885-1959)によって開発され、手計算で大いに優位性を発揮する。変位を介さず、直接、応力を用いた反復解法によって材端モーメントが求められる。反復解法を表形式で行うため、現実の平面骨組でも応力解析が可能となる。固定法は、節点移動のある場合とない場合とでは解析方法が大きく異なる。さらに節点移動のある場合、整形ラーメンと異形ラーメンでも解析法が異なる。

固定法の原理は、まず部材荷重による固定端モーメントを求め、各節点に接合する固定端モーメントの総和より、不釣り合いモーメントを求める。これを全節点について行う。不釣り合いモーメントを解除して釣合を採ると、当該の節点は回転し、その節点に繋がる部材の他端に到達モーメントが発生する。この解除を全節点に対し順次行い反復することで、不釣り合いモーメントをゼロに収束させる。

整形骨組で節点移動がある場合、各層に仮想の部材角を与え、上記の不釣り合いモーメント解除を行い、反復計算により収束させた後、層せん断力を求める。この層せん断力と各層に加わる水平外力との釣合より、全層分の層せん断力の釣合式が得られる。後は連立方程式を解き、層せん断力の釣合を満たす曲げモーメント分布を求める。カーニー法(Kani method)は、この連立方程式を求める代わりに、不釣り合い層せん断力を、各層の柱に分配して解放する。同法は収束が悪く、多くの反復解法を必要とするが、操作は単純で、表計算で層せん断力の釣り合いを満たす曲げモーメント分布が得られ、節点変位がある場合の解が求められる。