第７６話　振動方程式の数値計算法 No.1

以前、Newmark β 法の数値計算法についてお話しした。ここでは、さらに基本に戻って、振動方程式の数値積分法の原理について考えてみよう。まず、1 自由度系の非線形振動方程式を以下のように表す。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \mathrm{r}(y) = \mathrm{f}$$

ここで、$m, c, \mathrm{r}(y), \mathrm{f}$ は、質量、粘性減衰、内力、外力を表す。内力が線形の場合、剛性係数 k により $\mathrm{r}(y) = ky$ となる。まず、増分後の時刻 $t + \Delta t$ の変位と速度を次式で予測する。

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\dot{y}(t)$$

$$\dot{y}(t+\Delta t) = \dot{y}(t) + \Delta t\ddot{y}(t)$$

上式を振動方程式に代入し、加速度について整理すると

$$\ddot{y}(t+\Delta t) = \frac{1}{m}\{\mathrm{f}(t+\Delta t) - c(\dot{y}(t) + \Delta t\ddot{y}(t)) - \mathrm{r}(y(t) + \Delta t\dot{y}(t))$$

結果、右辺項は既知となり、Δt 秒後の加速度が得られる。これで Δt 秒後の変位、速度、加速度が全て決定し、次のステップに移ることができる。この積分法は**オイラー(Euler)法**と呼ばれ、Δt が十分小さければ良い結果が得られる。

さらに精度の良い積分手法を得るために、増分前の情報を用いて次のように変位と速度をテーラー展開する。

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\dot{y}(t) + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{y}(t) + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{y}(t) + \cdots$$

$$\dot{y}(t+\Delta t) = \dot{y}(t) + \Delta t\ddot{y}(t) + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{y}(t) + \cdots$$

この中で、右辺の前 2 項を使用して数値積分する手法が、先の Euler 法であり、加速度まで使用する手法が**陽的 Nermark 法**と呼ばれている。これら 2 種は条件付き安定の積分手法となる。

次に、加速度の項を次のように t と $t+\Delta t$ の値の平均値を用い、

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\dot{y}(t) + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t+\Delta t))$$

$$\dot{y}(t+\Delta t) = \dot{y}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t+\Delta t))$$

上式を振動方程式に代入し、$\ddot{y}(t+\Delta t)$ で整理すると、

$$(m + c\frac{\Delta t}{2})\ddot{y}(t+\Delta t) + \mathrm{r}(\frac{\Delta t^2\ddot{y}(t+\Delta t)}{4})$$
$$= \mathrm{f}(t+\Delta t) - c(\dot{y}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t)) - \mathrm{r}(y(t) + \Delta t\dot{y}(t) + \frac{\Delta t^2}{4}\ddot{y}(t))$$

加速度 $\ddot{y}(t+\Delta t)$ に関する非線形の方程式を得る。ただし、内力 $\mathrm{r}(y)$ が線形の場合、次式を解くことで加速度が容易に得られる。

$$(m+c\frac{\Delta t}{2}+k\frac{\Delta t^2}{4})\ddot{y}(t+\Delta t)$$
$$=\mathrm{f}(t+\Delta t)-c\{\dot{y}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t)\}-k\{y(t)+\Delta t\dot{y}(t)+\frac{\Delta t^2}{4}\ddot{y}(t)\}$$

上記の手法は平均加速度法(Average acceleration method)と呼ばれ、無条件安定の積分手法となっている。同法は無条件安定であり、最も堅牢な手法であることから、現在でも多くの動的解析で使用される。ただし、数値減衰がないため高周波の振動が引き起こすことがあり、多自由度の非線形解析ではこれが不安定要因となる場合がある。テーラー展開の第 3 微分まで採用し、パラメータ (β,γ) を付けて変位と速度を仮定する手法は、Newmark-β 法と呼ばれ、パラメータ β,γ の与え方で各種の積分手法に一致する。例えば、$\gamma=1/2,\beta=1/4$ は先に述べた平均加速度法に、また、$\gamma=1/2,\beta=1/6$ は線形加速度法となる。また、$\gamma=1/2,\beta=0$ は陽解法となる。

Newmark-β 法が増分時刻 $t+\Delta t$ で振動方程式を設定しているのに対し、Wilson-θ 法は未来の $t+\theta\Delta t;\theta>1$ で振動方程式を解き、$t+\Delta t$ 時点の応答を求める。変位と速度は線形加速度法を変形して求める。高次モードに数値減衰を導入する積分方法として α 法のグループがある。この積分法は増分時刻 $t+\Delta t$ から $\alpha\Delta t$ 秒前に於ける中間点で振動方程式を設定し $t+\Delta t$ 秒の応答を求める。詳細は次回お話ししよう。

逐次積分法(step-by-step)は、以下のように、陰解法と陽解法あるいは両者の中間的手法となる混合法に分類される。

１．陰解法(implicit method)
- Houbolt 法（1950 年）
- Newmark-β 法（1959 年）
- Wilson-θ 法（1973 年）
- α 法のグループ
  - $WBZ-\alpha$ (Wood -Bossak - Zienkiewicz method)（1981 年）
  - $HHT-\alpha$ (Hilber-Hughes-Taylor method)（1977 年）
  - $G-\alpha$ (Generalized α method)
  - Generalized Energy-momentum method

２．陽解法(explicit method)
- RK 法（Runge-Kutta-Gill 法）
- 中央差分法（陽的 Newmark 法）

３．混合法（Semi-implicit method）
- Trujillo 法
- Park-Housner 法
- α-OS 法（1993 年）
- MET 法（Modal-explicit integration technique）(1995 年)
- OS-Newmark-β 法(2001 年)