第５２話　剛床仮定とその効果

立体骨組で、床の剛性が他の部材に比較して著しく硬いとき、剛床として扱うことができる。今回は、剛床仮定を数値計算では如何なる方法で実現し、またその効果はどのようなものかを考えてみよう。

剛床仮定により、床全体の動きは水平両方向の変位と上下軸の回転で表される。ただし床内節点の上下動及び面内軸回転は、各節点が独立に動くことを許す。従って、床内の梁には軸力と床面内のせん断力及び曲げモーメントは生じないが、振りモーメントと面外のせん断力及び曲げモーメントは発生する。その際、梁は、床の有効幅を考慮した T 型梁として考慮する。水平外力によって、柱にせん断力と曲げモーメントが生じるとき、一般の節点では外力と内力による釣合が得られるが、剛床面内の節点では力の釣合が得られず、剛床面には反力が発生する。

数値計算では剛床仮定を、任意の代表点で床面内節点の変位を表すことで実現する。ただし節点の面外変位は自由とする。まず、代表節点と剛床内の他節点との関係を検討する。図 1 に示す代表節点と他の節点が長さ L の剛部材で連結しており、部材の代表節点側を c 端、他の節点を i 端とする。また、剛部材の x 方向長さを L_x 、y 方向長さを L_y とする。剛部材両端での全体座標系の増分変位及び増分節点力を次式で表す。

$$\{\Delta u_i\}^T=\{\Delta u_i,\Delta v_i,\Delta w_i,\Delta\theta_{xi},\Delta\theta_{yi},\Delta\theta_{zi}\}\qquad \{\Delta f_i\}^T=\{\Delta N_i,\Delta Q_{yi},\Delta Q_{zi},\Delta M_{xi},\Delta M_{yi},\Delta M_{zi}\}$$

$$\{\Delta u_c\}^T=\{\Delta u_c,\Delta v_c,\Delta w_c,\Delta\theta_{xc},\Delta\theta_{yc},\Delta\theta_{zc}\}\qquad \{\Delta f_c\}^T=\{\Delta N_c,\Delta Q_{yc},\Delta Q_{zc},\Delta M_{xc},\Delta M_{yc},\Delta M_{zc}\}$$

ここで、 $\{\Delta u_i\},\{\Delta f_i\}$ は任意節点 i 側の増分変位と増分節点力であり、 $\{\Delta u_c\},\{\Delta f_c\}$ は代表節点 c 側の増分変位と増分節点力である。

剛床上の他の節点変位は、代表点における 2 方向の変位と z 軸回りの回転による x 方向と y 方向の変位を用いて、次のように表される。

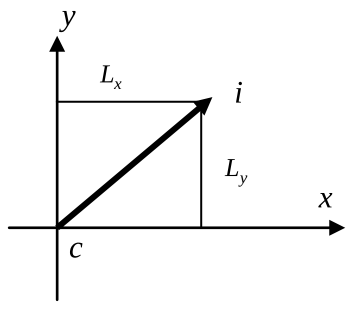

図 1 剛床内の代表点と任意節点との関係

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_i\\ \Delta v_i\\ \Delta\theta_{zi}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-L_y\\0&1&L_x\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta u_c\\ \Delta v_c\\ \Delta\theta_{zc}\end{Bmatrix}\rightarrow\{\Delta\mathbf{u}_i\}=\left[R_u\right]\{\Delta\mathbf{u}_c\}$$

ここで、両者共に全体座標系で表された変位とする。節点変位と同様に、節点力間の関係を以下に示す。

$$\begin{Bmatrix}\Delta P_{xi}\\ \Delta P_{yi}\\ \Delta M_{zi}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\L_y&-L_x&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta P_{xc}\\ \Delta P_{yc}\\ \Delta M_{zc}\end{Bmatrix}\rightarrow\{\Delta\mathbf{P}_i\}=\left[R_f\right]\{\Delta\mathbf{P}_c\}$$

上記 2 つの変換行列には、次のような関係がある。

$$\left[R_u\right]\left[R_f\right]^T=\left[\mathbf{I}\right]=\begin{bmatrix}1&0&-L_y\\0&1&L_x\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&L_y\\0&1&-L_x\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

従って、以下の関係が成立し、以後、これらを剛床変換行列と呼ぶ。

$$\left[R_u\right]^{-1}=\left[R_f\right]^T;\quad \left[R_f\right]^{-1}=\left[R_u\right]^T$$

剛床の変換行列を用いて、剛性行列を全体座標系から釣合座標系に変換してみよう。次式は、全体座標系で表された部材 m の釣合式である。

$$\left\{\Delta\mathbf{P}_i\right\}=\left[\mathbf{k}_m\right]\left\{\Delta\mathbf{u}_i\right\}$$

上の剛床変換行列を利用して、上式を釣合座標系に変換する。

$$\left[\bar{R}_f\right]\left\{\Delta\mathbf{P}_c\right\}=\left[\mathbf{k}_m\right]\left[\bar{R}_u\right]\left\{\Delta\mathbf{u}_c\right\}$$

さらに上式の左より、$\left[\bar{R}_f\right]^{-1}$ を掛け、$\left[R_u\right]$ と $\left[R_f\right]$ の関係を用いると、

$$\left\{\Delta\mathbf{P}_c\right\}=\left[\bar{R}_u\right]^T\left[\mathbf{k}_m\right]\left[\bar{R}_u\right]\left\{\Delta\mathbf{u}_c\right\}$$

となり、釣合座標系における剛性行列を次のように定義すると釣合座標系における釣合式が得られる。

$$\left[\bar{\mathbf{k}}_m\right]=\left[\bar{R}_u\right]^T\left[\mathbf{k}_m\right]\left[\bar{R}_u\right];\quad \left[\bar{R}_u\right]=\begin{bmatrix}R_u&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{bmatrix};\left[\bar{R}_u\right]=\begin{bmatrix}1&0&-L_y&0&0&0\\0&1&L_x&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

上の変換では、i 端は剛床位置、 j 端は一般の節点としている。両者共に剛床位置である場合は、上の行列 $\bar{R}_u$ 内の単位行列の替わりに、節点 j に関する剛床変換行列を用いることになる。

剛床内の節点変位と材端力を代表点のそれに変換、外力項も同様に変換し、釣合座標系における静的な全体釣合式を構築する。釣合式を解いて求めた変位から、剛床代表点の変位を剛床内の節点変位に変換し、各部材の応力を求める。このように剛床仮定は、剛床変換行列による座標変換で実現される。動的問題においても同様に、質量項や減衰項、及び地震力などの外力項も座標変換により、剛床仮定が得られる。

最後に、剛床を無視した立体骨組では、数値計算上如何なる現象が生じるか、その対策と共に考えてみよう。片寄った水平荷重が加わると、水平構面がゆがみ、梁の弱軸曲げモーメントや捩りモーメントが大きく発生することがある。なお、これを防ぐために、床板を等価な水平ブレースに置換して設置する。梁の中間に節点を設ける場合で、しかもそこに質量を取り付けると、梁の弱軸側にあり得ない振動モードが発生する。一般には、梁と柱の交点に集中質量を設定することが好ましい。