第４０話　オイラーの公式

今回はちょっと息抜きに数学の公式に関するお話しをしよう。工学で最もよく使う公式であり、**オイラーの公式**(Euler's formula)と呼ばれる関係は、次式の指数関数と三角関数の間に成立する。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ここで、eは指数関数、iは虚数単位、$\cos\theta, \sin\theta$は各々余弦関数及び正弦関数である。任意の複素数θに対して成り立つ等式であるが、特にθが実数である場合が重要である。θが実数の時、複素数$e^{i\theta}$は、θが複素平面上の偏角(角度θの単位はラジアン)で、単位円上の位置に対応する。この公式は、歴史的には全く起源の異なる指数関数と三角関数が、複素数の世界では密接に結び付いていることを示している。オイラーの公式を経由して、三角関数を複素指数関数に置き換えることで、微分方程式の扱いを簡単にする。特に**我々の分野では振動方程式の解法**などに利用される。

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler,1707−1783）は、18 世紀の数学者、天文学者、物理学者であり、特に 18 世紀の数学の中心的存在であり、続く 19 世紀の厳密化・抽象化時代の礎を築いた。スイスに生まれ、ロシアのサンクトペテルブルクで死去した。オイラーは人類史上最も多くの論文を書いたといわれ、並の数学者が一生かかって執筆する量の論文を、オイラーは毎年のように生涯に渡って、生産し続けていたともいわれる。

オイラーの公式を利用して三角関数を指数関数に置き換えることができる。オイラーの公式の複素共役を採ると、次式となる。

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

両者を足して、2 で割ると、

$$(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = (\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta)/2$$
$$= \cos\theta \rightarrow \cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$$

また、前者引く後者を 2i で割ると

$$(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = (\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta)/2i$$
$$= \sin\theta \rightarrow \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$$

となり、三角関数が指数関数に置き換えられる。

オイラーの公式に、$\theta = \pi$ を代入すると、次の簡単な関係が得られる。

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi \rightarrow \quad e^{i\pi} = -1$$

上式を**オイラーの等式**と呼ぶ。ここで、e は自然対数の底であるネイピア数で、およそ 2.718、π は円周率で約 3.1416、i は虚数単位で $i^2=-1$ である。無理数であるネイピア数や円周率が簡単な式で結びついていることには驚きである。オイラーの等式は、数学史上最も美しい等式として知られる。

ネイピア数は 1618 年にネイピアが発表した対数の研究の付録の表にその端緒があるが、定性的に研究したのはオイラーである。ジョン・ネイピア(John Napier;1550−1617）はスコットランドの出身で、数学者・物理学者、天文学者として知られる。

指数のべき乗 e^x で、x が実数であれば通常の指数関数であり、微分した関数もそれ自身となる特異な性質をもつ。指数関数はマクローリン展開ができ、次式で表される。

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

上式で x を $i\theta$ に置き換えて、$e^{i\theta}$ の定義式とする。

$$e^{i\theta}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots$$

オイラーの等式とは、上式の θ に π を代入した複素数級数の収束値が、－１となることを示している。

$$e^{i\theta}=1+\frac{i\tau}{1!}+\frac{(i\pi)^2}{2!}+\frac{(i\pi)^3}{3!}+\frac{(i\pi)^4}{4!}+\cdots\rightarrow\quad -1$$

各種の定理や公式をこのオイラーの公式を用いると、容易に説明できる。まず、ピタゴラスの定理を証明してみよう。ピタゴラスの定理は直角三角形で、斜辺の 2 乗は他の 2 辺の 2 乗の和に等しいであり、次式で表される。斜辺の長さを A とすると、

$$A^2=(A\cos\theta)^2+(A\sin\theta)^2\rightarrow 1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

であり、

$$1=e^0=e^{i\theta}e^{-i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

として、容易に証明できる。

次に、三角関数の加法定理を証明してみよう。加法定理は

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$
$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$$

であり、$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$ の両辺にオイラーの公式を適用する。

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y)&=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\&=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\end{aligned}$$

上の等式で、実数と虚数は各々等しいことから、加法定理が成立する。