



### 第 39 話 鉄骨の座屈後挙動

今回は鉄骨の座屈後挙動についてお話しする。線形座屈解析では、座屈荷重は分っても、変形が大きくなる座屈後挙動は正確には得られない。厳密に解析するためには弾性大変形(Elastica)の問題を解かなければならず、特殊な方法を使用することになる。そこで、近似的な方法で得られたコイター(Koiter)の解を紹介する。その近似解は、

$$P = P_E \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \delta^2 \right)$$

で与えられ、荷重は座屈後、部材中央のたわみ  $\delta$  の 2 乗に比例して増加することを示している(図 1(a)点線)。部材中央の横変位と部材長さの比  $\delta/l$  が 0.2 程度までは、厳密解に良い近似となっている。

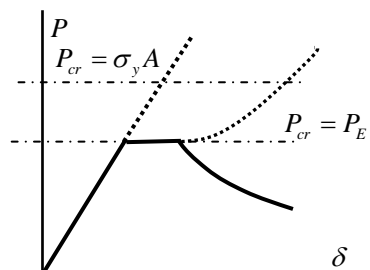
弾性座屈でも、座屈後、部材には曲げモーメントが生じ、曲率が大きくなると、材中央部の断面内に塑性域が発生する。この断面の塑性化によって負担軸力が減少し、変位の増加に伴って荷重が低下する。図 1 には、2 種の代表的な座屈後弾塑性釣合曲線が描かれている。同図の(b)では座屈荷重が Euler 座屈荷重より低い場合、つまり塑性座屈を示し、座屈前に断面が塑性化する。同図(a)では Euler 座屈荷重で弾性座屈し、その後、曲げモーメントの進行に伴って材中央の断面で塑性化が始まり、実線で示すように負担軸力の低下が生じる。

座屈後の弾塑性釣合曲線を近似的に求める方法について考察する。まず、柱部材は剛棒で部材中央に剛塑性ヒンジを有する剛塑性モデルを用いて、座屈後の荷重と部材中央の水平変位関係を求める。ここでは、図 2 に示すように荷重が作用し、水平変位によって部材中央に塑性ヒンジが発生し釣り合っている状態を考える。塑性ヒンジが発生している断面の応力状態は、解析を容易にするために、断面は幅  $b$  でせい  $D$  の矩形断面とし、また、図 4 に示す弾性域のない完全剛塑性状態を仮定する。

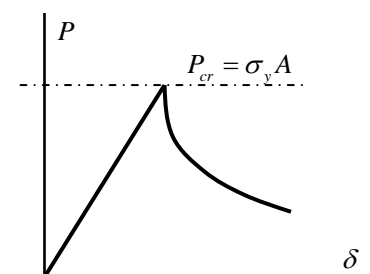
図 3 の座屈後状態では水平変位  $\delta$  が生じており、部材中央におけるモーメントの釣合より、 $M = P\delta$  が得られる。ここでは部材が不安定になる瞬間、部材中央の断面では降伏軸力になっているものとする。塑性ヒンジが発生している断面内の応力状態が図 4 で示されており、同図を参考にすると、断面内の応力状態から軸力  $N$  と曲げモーメント  $M$  が次のように得られる。

$$N = 2be\sigma_y; \quad M = 2b \frac{D^2}{8} \sigma_y - 2b \frac{e^2}{2} \sigma_y = \left( \frac{D^2}{4} - e^2 \right) b \sigma_y$$

ここで  $e^2 = N^2 / (4b^2\sigma_y^2)$  と矩形断面の全塑性モーメント  $M_p = bD^2\sigma_y / 4$



(a) 弾性座屈



(b) 塑性座屈

図 1 座屈後の釣合曲線

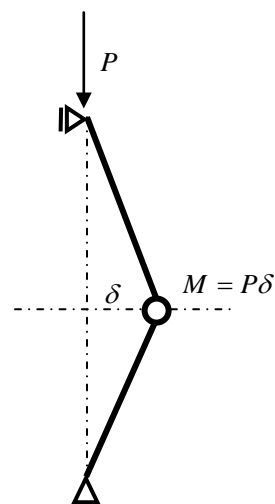


図 2 剛塑性モデル

を、上式右に代入すると、次式が得られる。

$$M = \left( \frac{bD^2}{4} \sigma_y - \frac{N^2}{4b\sigma_y} \right) = M_p - \frac{N^2}{4b\sigma_y} \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \frac{N^2}{4b\sigma_y M_p} = 1 - \left( \frac{N}{bD\sigma_y} \right)^2$$

部材の降伏軸力が  $N_Y = bD\sigma_y$  であることから、上式は、

$$\frac{M}{M_p} + \left( \frac{N}{N_Y} \right)^2 = 1$$

となり、軸力と曲げモーメントの関係が求められる。

釣合式  $M = P\delta$  に上式と軸力と外力との関係を代入すると、

$$\delta = \frac{M}{P} = \frac{1}{P} \left( 1 - \left( \frac{P}{N_Y} \right)^2 \right) M_p; \quad P = N \quad \dots\dots(1)$$

となる。矩形断面では、 $M_p = bD^2\sigma_y / 4 = DN_Y / 4$  であることより、この値を上式に代入すると

$$\delta = \frac{1}{P} \left( 1 - \left( \frac{P}{N_Y} \right)^2 \right) \frac{D}{4} N_Y = \frac{D}{4} \left( \frac{N_Y}{P} - \frac{P}{N_Y} \right)$$

として、荷重と部材中央の横方向変位との関係が得られる。

次に、座屈後の荷重と軸方向変位の関係を調べる。前モデルと同様に、座屈する瞬間では断面力は降伏軸力に達しているものとする。荷重点の下方向変位  $\Delta u$  は、次式のように弾性軸方向変位と曲がることによって生じる変位の和として与えられる。

$$\Delta u = \frac{Pl}{AE} + \int_0^l (ds - dx)$$

右辺第 2 項の積分は、少しの計算より、

$$\int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left( dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) - dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

となる。さらに、座屈後の変形は、弾性座屈で求めた変形場  $y = \delta \sin \pi x / l$  を用い、以下のように積分すると、次式が得られる。

$$\int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \left( \frac{\delta\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \left( \frac{1 + \cos(2\pi x/l)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi\delta}{l} \right)^2 \left[ x + \frac{l}{2\pi} \sin(2\pi x/l) \right]_0^l = \frac{(\pi\delta)^2}{2l}$$

上式を弾性軸方向変位に代入すると、軸方向変位と部材中央の水平変位との関係が得られる。

$$\Delta u = \frac{Pl}{AE} + \frac{(\pi\delta)^2}{4l}$$

式(1)を上式に代入すると、軸方向変位と荷重との関係が得られる。

$$\Delta u = \frac{Pl}{AE} + \frac{\pi^2}{4l} \left\{ \frac{D}{4} \left( \frac{N_Y}{P} - \frac{P}{N_Y} \right) \right\}^2 \quad \dots\dots(2)$$

図 5 には、式(1)の荷重と材中央の水平変位の関係(同図(b))、及び式(2)の荷重と軸方向変位の関係(同図(a))が示される。

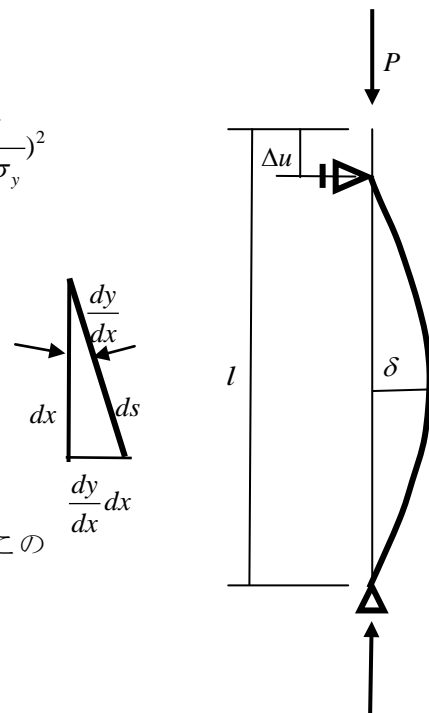


図 3 座屈後の軸方向変位

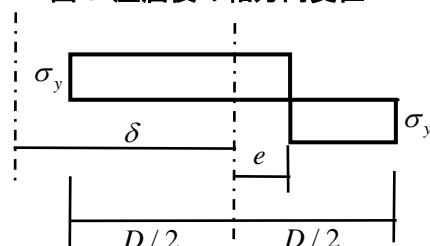
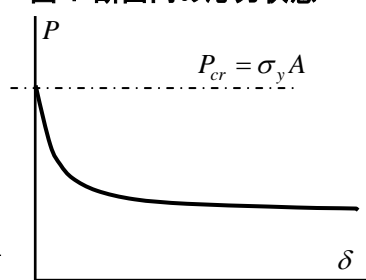
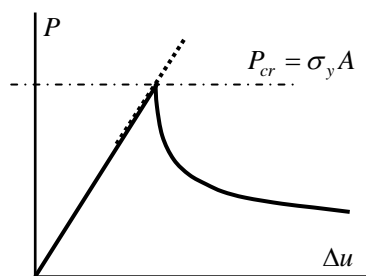


図 4 断面内の応力状態



(a) 荷重と水平変位の関係



(b) 荷重と軸方向変位の関係

図 5 座屈後の釣合曲線