第３８話　仮想仕事の原理

今回は仮想仕事の原理についてお話しする。仮想仕事の原理は力学におけるエネルギー原理のひとつであり、構造力学でも多くの場面で登場する。例えば、不整定構造物の変位を求める場合や骨組の崩壊荷重を求める場合、あるいは非線形釣合式を求める際にも利用する。

仮想仕事の原理(principle of virtual work)とは、「ある物体に複数の力が作用し、釣合状態にある場合、その物体が十分小さい仮想変位を受けるとき、その力の為す仕事はゼロである」である。言い換えると、「複数の外力が作用し、構造物が釣合状態にあるとき、境界条件を満足する任意の微小変形に対して、外力と内力のなす仕事は等しい」。この仮想仕事の原理は、1725 年ごろヨハン・ベルヌーイが創始したと言われており、その子のダニエルと弟子のオイラーが材料力学に応用した。その後、カスチリアノの定理、マクスウェル・ベッティの相反作用の定理へと研究が続く。昔の構造力学書には、これらの定理が記述されていたが、現在ではあまり見かけない。

例として、トラス部材の幾何学的非線形解析における静的釣合式を、仮想仕事の原理より求める。ここで、部材両端の変位は、トラス部材であるため $(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2)$ の 6 個である。仮想仕事の原理より、部材の増分静的釣合式は次式で与えられる。ここでは、仮想仕事の原理として、「増分荷重と増分変位が加わり、トラス材が釣り合った状態にあるとき、仮想増分変位 $\delta(\Delta u)$ と仮想増分ひずみ $\delta(\Delta\varepsilon)$ を作用させるとき、外力仕事と内力仕事の和はゼロである」を用いる。

$$\int \delta(\Delta\varepsilon)(\sigma_x + \Delta\sigma_x)dV - \int \delta(\Delta u)(p + \Delta p)dS = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、σ_x は軸方向応力、$\Delta\sigma_x$ は増分軸方向応力である。また、増分ひずみは、$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N$ であり、次式で示すように、$\Delta\varepsilon_L$ は増分変位に対して一次式であり、$\Delta\varepsilon_N$ は二次式である。

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varepsilon_0 = \frac{d\Delta u}{dx}; \quad \Delta\bar{\varepsilon}_L = \left(\frac{dv}{dx}\right)^T \left(\frac{d\Delta v}{dx}\right) + \left(\frac{dw}{dx}\right)^T \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right) \\ &\Delta\varepsilon_N = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

ここで、(u, v, w) は増分前の変位であり、$(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ は増分変位である。式(2)を式(1)に代入すると、

$$\int \delta(\Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N)(\sigma_x + \Delta\sigma_x)dV = \int \delta(\Delta u)\,pdS + \delta(\Delta u)\Delta pdS \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。上式を展開し、増分変位 $\Delta\mathbf{u}$ のべきで整理すると、

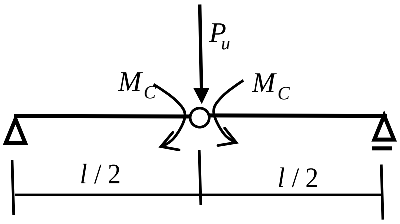
$$\int \delta(\Delta\varepsilon_L)\sigma_x dV + \int \delta(\Delta\varepsilon_L)\Delta\sigma_x dV + \int \delta(\Delta\varepsilon_N)\sigma_x dV + \int \delta(\Delta\varepsilon_N)\Delta\sigma_x dV$$
$$= \int \delta(\Delta\mathbf{u})\, pdS + \int \delta(\Delta\mathbf{u})\Delta pdS \qquad \cdots\cdots(4)$$

として、非線形の静的釣合式が得られる。

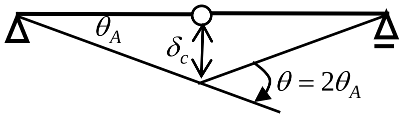
次に、仮想仕事の原理を用いて骨組の崩壊荷重を求めてみよう。この原理を利用して崩壊荷重を求める場合、微小変形として崩壊メカニズムを考える。任意節点 j に集中荷重 P_j を受ける骨組があるとする。この骨組が荷重 $\rho_u P_j$ のもとに崩壊したと仮定したとき部材は剛体と考えてよく、また、塑性ヒンジ i における曲げモーメントを M_i とし、また仮定された崩壊メカニズム時における点 i の荷重方向の変位を δ_j、塑性ヒンジ i の回転角を θ_i とすれば、仮想仕事式及び崩壊荷重は次式で得られる。

$$\rho_P \sum_j P_j\delta_j = \sum_i M_i\theta_i; \quad \rightarrow \rho_P = \frac{\sum_i M_i\theta_i}{\sum_j P_j\delta_j} \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで、ρ_P は崩壊荷重係数と呼ばれる。



(a) 荷重と曲げモーメント



(b) 仮想変位

図 1 単純梁の崩壊メカニズム

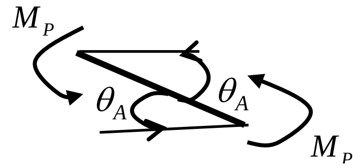
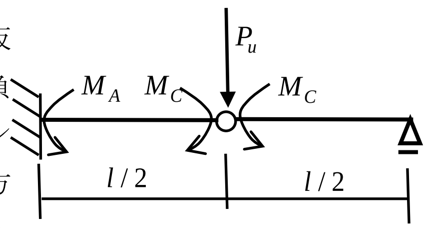


図 2 塑性ヒンジに加わるモーメントと回転量

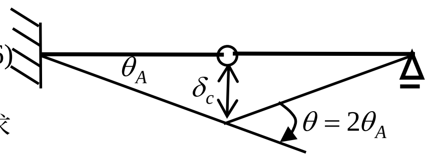
骨組によっては異なったメカニズムが存在することがあり、どのメカニズムを使用するかによって異なった崩壊荷重が得られる。まず、この仮想仕事の原理を、梁中央に集中荷重を受ける単純梁に適用してみよう。塑性ヒンジが生じている部分では全塑性モーメントとなっており、また、微小変形として、図 1(b)に示される崩壊メカニズムが仮定される。

図 1 を参考にして、内力と外力を計算する。外力については、P_u が変位 δ_c に対して為す仕事 $P_u\delta_c$ で与えられ、荷重下の変位 δ_c は幾何学的条件より $\theta_A l/2$ である。また、座屈機構状態では、部材は全て剛体的に変位することから、部材内部の内力仕事はゼロである。ただし、塑性ヒンジ位置では全塑性モーメントとなっており、このモーメントとヒンジの回転よって仕事が発生する。ヒンジに加わるモーメントとヒンジに仮想的に生じる回転の方向が同じ場合は正の仕事をし、また逆の場合は負となる。同方向か否かは分からない場合は、図 2 のように材端モーメントと変位後から元の位置までの回転を考えると良い。この例では、同方向であることから内部仕事は正となり、また回転角は両端共に θ_A である。仮想仕事の原理より崩壊荷重 P_u が次のように求められる。

$$P_u\delta_c = 2M_P\theta_A; \quad \rightarrow P_u = \frac{2M_P\theta_A}{\delta_c} = \frac{2M_P\theta_A}{\theta_A l/2} = \frac{4M_P}{l} \qquad \cdots\cdots(6)$$



(a) 荷重と曲げモーメント



(b) 仮想変位

図 3 一端固定、他端ピンの梁の崩壊メカニズム

次に、図 3 の不静定梁について仮想仕事の原理を用いて崩壊荷重を求めてみよう。図 3(b)に示す材端モーメントと崩壊メカニズムによる微小変位を用いて各仕事を計算し、仮想仕事の原理を適用すると次のように崩壊荷重 P_u が得られる。

$$P_u\delta_c = M_P\theta_A + 2M_P\theta_A \rightarrow P_u\frac{\theta_A l}{2} = 3M_P\theta_A \rightarrow \quad P_u = \frac{6M_P}{l} \qquad \cdots\cdots(7)$$