第３２話　鉄骨の座屈 No.2 非弾性座屈理論

今回は前回に続いて鉄骨の座屈、特に非弾性座屈についてお話しする。非弾性座屈に関する理論は、19 世紀末に相次いで発表されており、例えば、Engesser による接線係数理論、Engesser-Karman による等価係数理論である。前者の座屈時応力σ_tは、ヤング係数が接線係数に、また、後者の座屈時応力σ_rは同じく柱の曲げ引張側に生ずる応力の除荷を考慮した換算係数である。圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのが Shanley である。同氏は、両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示した。図 7 には、接線係数理論と等価係数理論による座屈時応力が示されており、2 つの座屈時応力と Euler 応力との関係は、次の$\sigma_{Euler} > \sigma_r > \sigma_t$で与えられる。

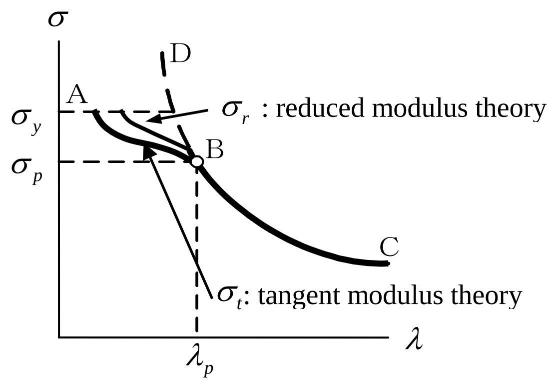

図 7 接線係数理論と換算係数理論による座屈時応力

実験によると降伏応力に達していないにもかかわらず、座屈荷重が Euler 座屈荷重より低く得られることがある。この場合、材料のヤング係数が比例限を越えて剛性が低下していることによると説明され、かなりの説得力を有していた。この説明を理論的に解明するために、古くから二通りの説、**接線係数理論**と**等価係数理論**がある。

Engesser による接線係数理論(tangent modulus theory)では、柱が完全系であるとすると、座屈を生じるまで柱は直線を保ち、曲げ変形(曲げモーメント)は生じていない。従って、不安定になる瞬間で発生する曲げモーメントはひずみの増分に対する応力の増分を用いて計算される必要がある。つまり、応力が比例限を超えていれば、弾性係数としてその瞬間における応力―ひずみ曲線の勾配：$E_t = d\sigma / d\varepsilon$を弾性域の$E$の替わりに用いなければならない。この係数$E_t$を接線弾性係数(tangent modulus of elasticity)という。座屈前の挙動が非線形性を現すことから、線形座屈解析から求められず、増分論によって求めることになる。軟鋼のように降伏を有する材料では、降伏点の接線弾性係数は$E_t = 0$となることから、座屈荷重が降伏点を越えて上昇することはない。一方、降伏点以下でしかも比例限以上の応力状態では、Euler 座屈荷重より低い値で座屈することになる。この説より得られた結果は実験結果と良い一致を示すことが確かめられている。

降伏応力σ_yを有する材料では断面内応力はこの降伏応力を超えることはない。従って、座屈荷重も$P_{cr} = \sigma_y A$以上にならないことを示している。さらに、図 8 では比例限応力σ_Pを超えると、接線弾性係数によって座屈耐力も低下していることを示す。

実験結果と良い一致を示すにもかかわらず、接線係数理論には理論的に疑わしい点があると指摘されていた。今、図 9 において圧縮状態で点Ａの比例限の応力を超え、点Ｂに示す応力の状態に進んだとする。そこで、荷重が一定の状態で曲げ変形が発生するものとすると、断面内には曲げモーメントが生じ、断面の一部では圧縮応力は増加するが、残りの領域では圧縮応力に除荷が起きる。また荷重が一定であることから、増分時の圧縮応力と除荷分の応力の和はゼロでなくてはならない。さて、このような状態で圧縮応力が増加する領域では接線弾性係数E_tが用いられるが、一方、除荷領域では、図 9 の点Ｃに移動するため、除荷弾性係数を使わなければならない。その剛性は接線弾性係数より大きく、多くの場合ヤング係数Eに等しい。従って、圧縮応力が増加する領域ではE_tを、また減少する領域ではEを使用するのが正しいということになる。Engesser-Von Karuman によるこの方法は等価係数理論（reduced modulus theory）と呼ばれている。この等価係数理論では、座屈荷重を計算する際、応力が比例限を超えると、換算弾性係数が使用されることになる。当然、得られる座屈荷重は前記の接線係数理論によって求めた座屈荷重より高くなる。

理論的には、より完全に思われる等価係数理論は実験結果と比べたとき多少過大な値となり、接線係数理論に劣るといわれていた。そのため、実験との一致か、理論的な完全さかで長い間、論争が続けられてきた。接線係数理論（tangent modulus theory）の欠点は座屈時に生じるであろう除荷を無視している点であり、等価係数理論（reduced modulus theory）の欠点は、$\delta P = 0$という重要な仮定の根拠が曖昧に使用されている点である。この論争は後日説明する Shanley モデルによって決着が図られる。

Shanley モデルは、2 つの棒状剛体の間に 2 つのバネが取り付いた単純な構造を用いている。同モデルによれば、応力が非弾性になると tangent modulus theory による座屈荷重で不安定となり、釣合経路に分岐座屈が生じる。さらに真っ直ぐな釣合経路は不安定釣合となる。一方、分岐した釣合経路では安定釣合となり、水平変位が増加するに従って荷重も増加し、現実はこちらの釣合経路に進む。増加する荷重は reduced modulus theory による座屈荷重に漸近する。

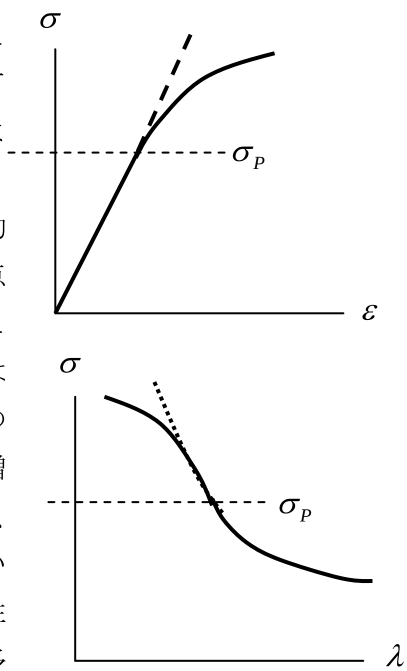

図 8　比例限以上の鋼材の応力とひずみ関係と座屈時応力

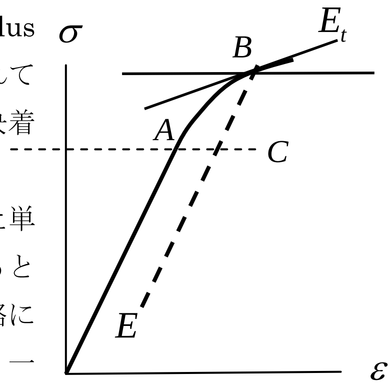

図 9 鋼材の応力とひずみ関係