第３１話　鉄骨の座屈 No.1 鉄骨の設計式

今回は鉄骨柱の弾性座屈及び非弾性座屈についてお話しする。ここでは特に、線形の座屈解析における細長比の重要さや、応力とひずみの関係で比例限を超えて非弾性域の応力を考慮した tangent modulus theory(接線係数理論)と reduced modulus theory (等価係数理論)に関する座屈理論、及びシャンレイ(Shanley)モデルについてお話しする。

オイラー座屈については既にお話しした。そこでは、一端ピン・他端ローラー支持に対する解、つまり固有値問題における座屈荷重が次式で与えられる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI_z;\quad (n = 1, 2, 3 \cdot\cdot)$$

ここで、$k^2 = P / EI_z$ である。また座屈時の変形状態が次式で与えられ、これらは一般に座屈モードと呼ばれ、図 1 に示される。

$$v = B\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad (n = 1, 2, 3 \cdot\cdot)$$

実際は、$n = 1$ で、オイラー(Euler)座屈荷重 P_E として、また座屈する瞬間の圧縮応力 σ_E は座屈荷重を断面積で割ることで求められる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{EI_z\pi^2}{Al^2}$$

上式に、断面二次半径 $i \to i^2 = I_z / A$ を用い、さらに、材長と断面二次半径の比として、細長比 $\lambda = l / i$ を導入すると弾性座屈応力 σ_E は次式となる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2\left(\dfrac{A}{I_z}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

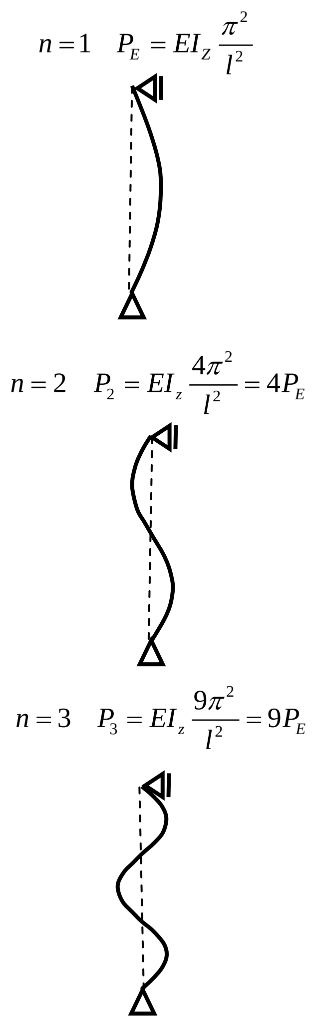

図 1 一端ピン・他端ローラー支持柱の座屈荷重と座屈モード

上式で $\lambda \to 0$ では、弾性座屈応力は $\sigma_E \to \infty$ となるが、材の応力は降伏応力 σ_y を超えることはない。結果、図 2 のように応力の上限は点線の σ_y となる。一方、弾性座屈で座屈時の軸方向ひずみは、次式のように軸力や弾性係数とは無関係に細長比によってのみで決まる。

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2$$

上で求めた弾性座屈応力 σ_E はヤング係数が比例限度内であるとき成立するが、比例限度を超えると成り立たない。さらに、応力が材の降伏応力 σ_y を超えると、部材は塑性座屈する。この間の状況を次の 2 つの図で説明する。図 3 は、座屈時の応力と細長比の関係を示し、図 4 は材の応力とひずみの関係

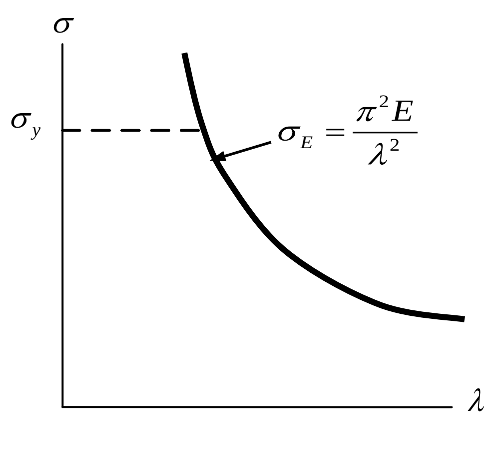

図 2 弾性座屈時応力と細長比

を表す。図 3 の比例限界応力σ_pとオイラー荷重との交点 B を通るλ_pは限界細長比といい、弾性座屈を示す最小の細長比となる。つまり、材の細長比が$\lambda > \lambda_p$であれば弾性座屈、$\lambda \leqq \lambda_p$であれば非弾性座屈となる。限界細長比は比例限界応力σ_pを少し整理すると、$\lambda_p = \pi\sqrt{E/\sigma_p}$として表される。

図 3 で、弾性座屈を表す曲線 BC 上の軸方向応力はσ_pより小さな値であり、一般にこの範囲の材は**長柱**と呼ばれる。曲線 AB は、軸方向応力がσ_pとσ_yの間の応力状態で生じる非弾性座屈時の$\sigma-\lambda$関係を表し、一般にこの範囲の材は**短柱**と呼ばれる。

非弾性領域の座屈応力σ_{cr}を実験式として与え、現在でも各国で設計式として使われている。

Gordon-Rankine 式：$\sigma_{cr} = \dfrac{\sigma_y}{1+c\lambda}$　; Johnson 式：$\sigma_{cr} = \sigma_y - k\lambda^2$

Tetmajor 式：$\sigma_{cr} = a - b\lambda$

ここで、σ_yは材の降伏応力、c,k,a,bは材料によって決まる係数である。

建築学会規準では、比例限度応力を$\sigma_p = 0.6F$と定め、先に述べた限界細長比Λを次式としている。ここでFは材の設計基準強度を表す。

$$0.6F = E(\frac{\pi}{\Lambda})^2;\quad \Lambda = \pi\sqrt{\frac{E}{0.6F}}$$

設計用許容応力度f_cは、材の細長比が限界細長比より大きい場合、弾性座屈として Euler 式に安全率を考慮して下式下で表され、また、限界細長比より小さい場合は、非弾性で、下式上の細長比に関する 2 次式で与えられる。安全率νは次式とし、部材が細長くなるに従って、不完全さ(Imperfection)、つまり形状初期不整や残留応力が座屈荷重に与える影響が著しくなるとして、図 6 に示すように細長比の大きい領域では大きな値となる。

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}(\frac{\lambda}{\Lambda})^2$$

ただし、上式は$\lambda < \Lambda$の範囲であり、$\lambda > \Lambda$の場合、つまり弾性座屈については、$\nu = 3/2 + 2/3 = 2.17$の値を用いる。以下に、建築学会で使用している設計用許容応力度を示す。

$\lambda < \Lambda$に対し（非弾性）
$$f_c = \frac{\left\{1 - 0.4(\frac{\lambda}{\Lambda})^2\right\}F}{\nu}$$

$\lambda > \Lambda$に対し（弾性）
$$f_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}\frac{0.6F\Lambda^2}{\lambda^2} = \frac{0.277F}{(\frac{\lambda}{\Lambda})^2}$$

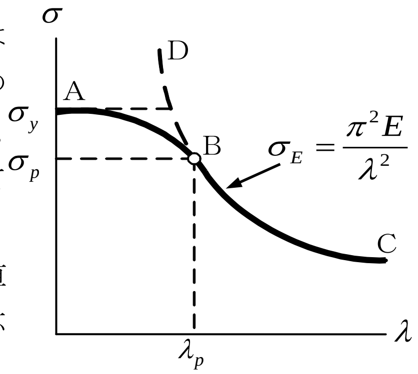

図 3 中心圧縮を受ける材の座屈応力

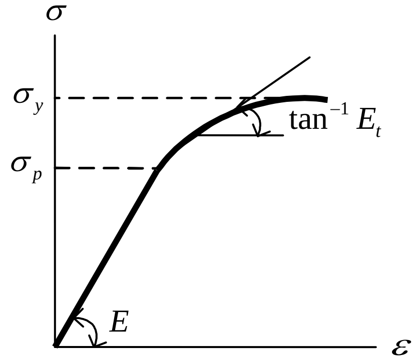

図 4 材の応力―ひずみ関係

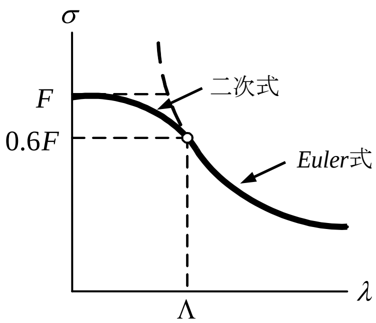

図 5 学会規準式における座屈時応力

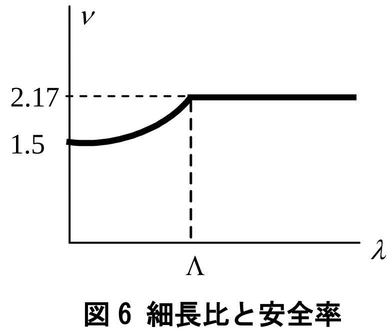

図 6 細長比と安全率