第３０話　複素数と指数関数

今回は、構造力学でも良く使用する複素数と複素指数関数のお話しをする。 複素数(complex number)は、実数の対である a,b と、１と線形独立な要素 i の線形結合 $a+bi$ で表される数であり、特に基底 i はその平方が-1 となる特別な性質を有し、**虚数単位**と呼ばれる。複素数の概念は、一次元の実数直線を拡張し、二次元の複素平面で表される。その値は、図 1 に示すように二次元平面上に存在すると考えることができる。この平面は、複素数平面と呼ばれ、横軸は実軸(real axis)、縦軸は虚軸(imaginary axis)という。

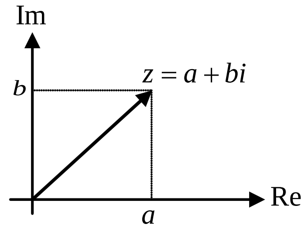

図 1 複素数平面上の値

複素数 $z=a+bi$ は、a を実部(real part)、b を虚部(imaginary)という。また、複素数 z の実部と虚部は、各々 $\mathrm{Re}(z)$ と $\mathrm{Im}(z)$ として表される。実数でない複素数を虚数と呼ぶ場合もあり、実部が 0 である虚数は特に純虚数という。2 つの複素数が等しいとは、実部と虚部が各々等しいことを意味する。複素数の四則演算は、次式で表される。

$$z_1 \pm z_2 = (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm c)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$z^n z^m = z^{n+m};\quad (z^n)^m = z^{nm};\quad (zw)^n = z^n w^n$$

虚部の部号が異なる 2 つの複素数を**複素共役**または**共役**(conjugate)という。すなわち、複素数 $z=a+bi$ の共役は $\overline{z}=a-bi$ である。複素数の絶対値 $|z|$ は実数 $\sqrt{a^2+b^2}$ である。絶対値に関する演算には次式がある。

$$|z| = |\overline{z}|;\quad z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z);\quad z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z);\quad z\overline{z} = |z|^2$$

$$(z)^{-1} = \overline{z}/|z|^2 \quad (z \neq 0);\quad \overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w};\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

$$\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w};\quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

実数係数の多項式 $f(x)=0$ の解が複素数 z であるとき、共役である $\overline{z}$ も解である。つまり、 $f(a)=0 \to f(\overline{a})=0$ が成立する。同式はダランベールによる。ジャン・ル・ロン・ダランベール(Jean Le Rond d'Alembert; 1717-1783)はフランスの哲学者、数学者、物理学であり、次の**ダランベールの原理**を明らかにする。外界から力 F を加えられた質点が加速度 $\ddot{u}$ で運動する場合、ニュートンの運動方程式は $m\ddot{u}=F$ であり、$F-m\ddot{u}=0$ と移項すると、質点に作用する外力 F と力 $-m\ddot{u}$ とが釣り合った状態と見做せる。この見かけ上の力 $-m\ddot{u}$ を仮定することで、運動問題を力の釣

合問題に帰着させることをダランベールの原理という。この見かけの力を慣性力と呼ぶ。

複素数を極形式で表すこともある。図 2 に示すように、複素数を点 P とすると、原点からの距離と偏角で表される。偏角 φ は、正の実軸と線分 OP 間を反時計回り図った角度(単位はラジアン)である。距離 r は先に示した複素数の絶対値 $r=|z|$ で表し、偏角は $\varphi=\arg(z)=\arctan(b/a)$ で求める。複素数の極形式表示は距離と偏角を用いると、(r,φ) で表され、元の複素数表示との関係は次式となる。

$$z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

さらに、オイラーの公式を用いれば、上式は $z=re^{i\varphi}$ と表すことができる。オイラーの公式については次回以降お話しする。

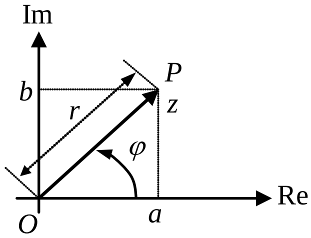

図 2 複素数の極形式表示

次に、指数関数(exponential function) e^x についてまとめる。まず、実数域における指数関数は、超越関数の一種であり、対数関数の逆関数である。自然指数関数 e^x はネイピア数 $e=2.718281828\cdots$ を低とする関数で、 $\exp x$ と書くこともある。指数関数の定義は次の冪級数で表す場合が多い。

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

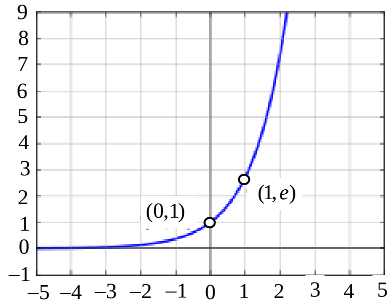

図 3 指数関数 e^x

図 3 に示す e^x の特徴として、導関数 $de^x/dx=e^x$ は元の指数関数となる。

上の指数関数の変数をそのまま複素数に取り換えることで、次の複素指数関数が得られる。

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

上の定義式に正方行列を代入することで、行列の指数関数(matrix exponential)が定義される。ここで、 X,Y を $n\times n$ の複素行列、 a,b を任意の複素数とする。同じく、$n\times n$ の単位行列を $\mathbf{I}$ 、ゼロ行列を $\mathbf{0}$ と表す。行列指数関数の基礎的性質は、次式で表される。

$$e^{\mathbf{0}}=\mathbf{I};\quad e^{aX}e^{bX}=e^{(a+b)X};\quad e^{X}e^{-X}=\mathbf{I}$$

$$XY=YX\rightarrow e^Xe^Y=e^Ye^X=e^{X+Y}$$

Y が正則ならば $e^{YXY^{-1}}=Ye^XY^{-1}$ となり、また $\exp X^T=(\exp X)^T$ 及び、$\exp X^*=(\exp X)^*$ も成立する。 X の転置を X^T 、共役転置を X^* で表す。

相似変換に関する性質として次式がある。

$$A=YXY^{-1}\rightarrow e^A=e^{YXY^{-1}}$$
$$=Ye^XY^{-1}$$

ここで、 Y は正則とする。

e^A が正則であると、その行列式は次式で与えられる。

$$\det(e^A)=e^{trA}$$

ここで trA は行列のトレースを意味する。

行列指数関数が重要である理由は、次の連立常微分方程式の解を求める際に使用できることである。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)=\mathbf{A}\mathbf{y}(t);\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$$

上の方程式の解は、 $\mathbf{A}$ を定行列として次式で与えられる。

$$\mathbf{y}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0$$

行列指数関数には多くの有用な特性がある。次回以降でお話しする。