



第 29 話 静的非線形系の釣合曲線は山道に似ている

静的な増分型非線形方程式を解いていくと、接線剛性が特異、あるいは偽特異となり、不安定となる場合がある。骨組は座屈か崩壊現象を生じ、設計論的には以後の解析を必要としない。ただ、幾何学的非線形性を有し、大変形するような構造物では、座屈後挙動を調査することもある。そこで、今回は、静的非線形系の釣合曲線を山道に例え、釣合状態の全体像を俯瞰する。少し、ラフで厳密性に欠けるが、お許し願いたい。

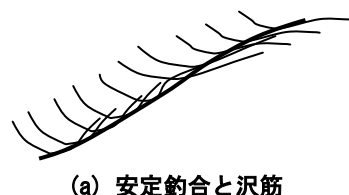
任意の荷重状態における釣合は、その時点での全ポテンシャルを平衡点近傍の変位で微分して求めた増分釣合式として表される。つまり、全ポテンシャルはひずみエネルギーと外力仕事の和で表され、静的釣合式は、平衡点近傍の変位で全ポテンシャルを停留させることで求める。

荷重の変化によって、静的釣合点が移動する軌跡を釣合曲線として表す。釣合曲線は一般的に荷重・変位関係を表し、荷重を与えると釣合曲線上の 1 点となる。ただし、非線形系では多くの点を表すこともある。静的釣合点近傍の全ポテンシャルの状況は、接線剛性行列を観察することで理解できる。この行列の固有値が全て正であると安定釣合であり、周辺の全ポテンシャルは釣合点より高くなる。山道でいうと沢となり、荷重が増加すると沢筋を登ることに似る。

固有値は固有値問題より求めるが時間がかかるため、特性を知るためには接線剛性行列の LDU 分解を用いる。固有値の負の数は、行列 D の対角項の負の数に等しく、この数を不安定次数 (instability order) と呼ぶ。つまり、不安定次数ゼロが安定釣合を示す。最小固有値と固有ベクトルがポテンシャルの勾配とその方向を表し、山道でいえば、沢の近傍で最も低い勾配とその方向を示す。逆に、最大のそれらは最もきつい勾配とその方向である。安定釣合点から少しずれると、動的状態となり減衰があると振動しながら元の釣合点に戻る。つまり、山道から少しずれても、低い方向に進めば元に戻ることができる。

不安定次数が 1 の釣合点は不安定釣合と呼ばれ、接線剛性行列の固有値の一つが負の値を持ち、対の固有ベクトル方向の全ポテンシャルは釣合点より低くなる。山道でいえば、一方向が崖となり、その方向に少しずれると滑り落ちることになる。

不安定次数は軌跡中、特別な事象がない限り変化しない。特別な事象とは屈服とか分岐であり、山道でいえば峠とか他の道との交差である。その点を不安定点あるいは座屈点と呼び、接線剛性行列は特異行列となる。

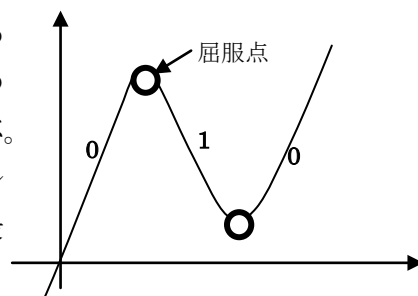


(a) 安定釣合と沢筋

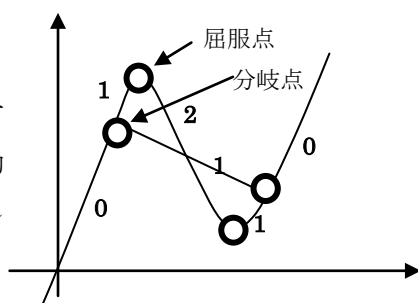


(b) 不安定釣合と尾根筋

図 1 釣合曲線と山道



(a) 屈伏座屈を表す釣合曲線



(b) 分岐座屈を表す釣合曲線

図 2 釣合曲線上の不安定次数

その時、行列式はゼロとなり、固有値の一つが零となる。ふたつ同時にゼロになると同時座屈を起こしたことになる。

座屈点は図 3 のように各種のパターンがある。しかし、接線剛性だけでは情報が不足し、これらの座屈点を分類することはできない。不安定点の状態を調査する方法として、一般的にエネルギー論的方法が用いられる。全ポテンシャル U は、荷重のなす仕事 V_E と骨組に蓄えられるひずみエネルギー V_I の和として、 $U = V_I - V_E$ で与えられる。上式を座屈点において、座屈モード θ でテーラー展開すると次式となる。

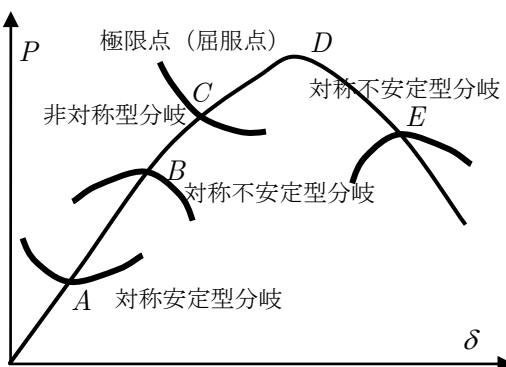


図 3 座屈点の分類

$$U = U(0) + \delta U \cdot \delta\theta + \frac{1}{2} \delta^2 U \cdot \delta\theta^2 + \frac{1}{6} \delta^3 U \cdot \delta\theta^3 + \frac{1}{24} \delta^4 U \cdot \delta\theta^4 + \dots$$

釣合経路では、常に第 1 変分はゼロとなり、釣合曲線上で安定かどうかは、第 2 変分の符号の正負によって次のように決定される。

$$\delta^2 U > 0; \text{安定釣合}; \quad \delta^2 U = 0; \text{臨界点}; \quad \delta^2 U < 0; \text{不安定釣合}$$

ここでは座屈点であるため $\delta^2 U = 0$ である。この第 2 変分が増分接線剛性行列に対応する。座屈点の状況は第 3 変分以降で調査する。第 3 変分の値がゼロでない場合、非対称の分岐を表す。さらに、この第 3 変分もゼロで第 4 変分に値がある場合、対称分岐型の座屈現象を現し、その第 4 変分の符号によって、正の場合は安定型、負の場合は不安定型の対称分岐型座屈となる。

座屈形態は屈服型と分岐型に分類され、分岐型は対称分岐と非対称分岐に分かれる。また、対称分岐には安定型と不安定型があり、座屈時には、座屈前の変形と全く異なる変形状態で不安定となる。特に不安定型分岐座屈の座屈後挙動は、不安定となった変形モードが大きくなるに従って耐荷能力が低下する。屈服型では、座屈前の変形状態と同種の変形で不安定となる。その後屈服点を越えるとその変形状態が大きくなり、荷重も低下する。屈服座屈で荷重が上昇する釣合曲線が近くに存在すると、その状態に瞬時に移行する。この現象は飛び移りと呼ばれ、実際の現象でも多く見られる。座屈後の釣合曲線の安定・不安定も増分接線剛性行列の不安定次数によって理解できる。

座屈後の釣合曲線は動的挙動に影響を与えることがある。図 2 のように、安定釣合曲線の近傍に不安定釣合曲線があると、非線形振動の安定域や、動座屈荷重への影響がある。また、初期不整や経年劣化によって、釣合曲線が変化するため、静的座屈荷重の劇的な低下や非線形振動の安定域の縮小などが見られる。安定釣合曲線の近傍に不安定釣合曲線がある場合は特に注意が必要である。これらについては後日お話しする。