第２２話　静的問題における非線形解析 No.2

今回は、前回の続きであり、さらに高度な非線形方程式の解法を学ぶ。修正増分法でも、増分値をかなり小さい値にしなければ誤差が累積する。最初に話すニュートン・ラフソン法では、増分時に反復計算で誤差をゼロに収束させる。非線形の増分釣合式は、式(4)と(8)を少し変更すると、

$$\Delta\phi\left(\Delta\mathbf{u}\right)=\Delta\lambda\mathbf{P}+\phi\left(\mathbf{u}_i\right)-\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{u}=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

となる。上式は非線形方程式であるため、反復計算によって上式を満たす解 $\Delta\mathbf{u}$ を求める。

反復計算では、初期値と反復を行うために漸化式が必要であり、以下に示す。初期値として、前ステップ i 回目で得られた変位 $\mathbf{u}_i$ とその荷重 $\lambda_i\mathbf{P}$ に対し、修正増分法の釣合式を用いて作る。

$$\mathbf{K}_T\delta\Delta\mathbf{u}=\Delta\lambda_i\mathbf{P}+\phi\left(\mathbf{u}_i\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ただし、上式中の不釣合い力 $\phi\left(\mathbf{u}_i\right)=\lambda_i\mathbf{P}-\mathbf{Q}\left(\mathbf{u}_i\right)$ は、前ステップの応力 $\mathbf{Q}\left(\mathbf{u}_i\right)$ から計算される。k 回目の反復漸化式は次式で与えられる。

$$\mathbf{K}_T\delta\Delta\mathbf{u}=\phi\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ここで、接線剛性 $\mathbf{K}_T$ は、幾何学的非線形より

$$\mathbf{K}_T=\mathbf{K}_L\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right)+\mathbf{K}_G\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right)+\mathbf{K}_N\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となり、反復ステップ毎に更新される。ただし、弾性部材であれば、$\mathbf{K}_L$ は常に一定であるが、部材の弾塑性を考慮すると変化する。また、右辺の不釣合い力は次式となる。

$$\phi\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right)=(\lambda_i+\Delta\lambda)\mathbf{P}-\mathbf{Q}\left(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_k\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

反復 k 回目の近似増分変位 $\Delta\mathbf{u}_{k+1}$ は以下の式で更新されるものとする。

$$\Delta\mathbf{u}_{k+1}=\Delta\mathbf{u}_k+\delta\Delta\mathbf{u} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

収束条件は一般に次式を用い、条件を満たすとき反復計算を終えて次ステップに進む。

$$\varepsilon\geq\frac{\sqrt{\sum(\delta\Delta\mathbf{u})^2}}{\sqrt{\sum(\Delta\mathbf{u}_{i+1})^2}}\quad ;or\quad \varepsilon\geq\frac{\sum\left|\delta\Delta\mathbf{u}_{i+1}\right|}{\sum\left|\Delta\mathbf{u}_{i+1}\right|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

上の条件を n 回で満たすと、変位ベクトル $\mathbf{u}_{i+1}$ と荷重 λ_{i+1} は次式となる。

$$\mathbf{u}_{i+1}=\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_n;\quad \lambda_{i+1}=\lambda_i+\Delta\lambda \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

ニュートン・ラフソン法では反復時に接線剛性 $\mathbf{K}_T$ を更新するが、前ステップで得た変位 $\mathbf{u}_i$ を用いて 1 回だけ求め反復する方法がある。つまり、反復時には変更しない手法であり、修正ニュートン・ラフソン法と呼ばれる。同法は、反復計算時で接戦剛性の書き換えと LDU 分解を行わないため、解析が高速となる。ただし、収束回数が増加する。

さらに高度な非線形方程式の解法である弧長法、特にクリスフィールド法について述べる。同法は、増分変位と増分荷重のベクトル長さが、常に指定した値となるように解を求める。そのため、極端に剛性が大きい場合や、逆に不安定点近傍、剛性が軟化する場合でも解が得られ、荷重増分法と変位増分法の欠点を補う優れた手法である。

最初は、増分型の非線形釣合式から始める。非線形釣合式は式(1)であり、k 回目の反復解である増分変位 $\Delta\mathbf{u}_{k+1}$ 及び増分荷重パラメータ $\Delta\lambda_{k+1}$ は、次式で更新されるものとする。

$$\Delta\mathbf{u}_{k+1} = \Delta\mathbf{u}_k + \delta\Delta\mathbf{u};\quad \Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k + \delta\Delta\lambda \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

また、反復計算が n 回で収束すると、変位ベクトル $\mathbf{u}_{i+1}$ と増分荷重 λ_{i+1} は、次式で表される。

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_n;\quad \lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

ただし、釣合式の数より、$\Delta\mathbf{u}$ と $\Delta\lambda$ の数が多くなるため、更新増分変位 $\delta\Delta\mathbf{u}$ と増分荷重 $\delta\Delta\lambda$ に次の制限を加え、釣合式と同時に解く。

$$f(\delta\Delta\lambda, \delta\Delta\mathbf{u}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

増分型の釣合式(8)を 2 式に分解し、次の解を得る。

$$\delta\Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P};\quad \delta\Delta\mathbf{u}_2 = \mathbf{K}_T^{-1}\phi(\mathbf{u}_i) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

釣合式(8)の解である更新増分変位ベクトルは $\delta\Delta\mathbf{u} = \delta\Delta\lambda\delta\Delta\mathbf{u}_1 + \delta\Delta\mathbf{u}_2$ として得られる。ここで、$\delta\Delta\mathbf{u}$ と $\delta\Delta\lambda$ には制限式(22)が存在する。ここでは、制限式として超円を表す次式を用いる。

$$f(\delta\Delta\lambda, \delta\Delta\mathbf{u}) = \Delta\mathbf{u}_{i+1}^T\Delta\mathbf{u}_{i+1} + \left(\beta\Delta\lambda_{i+1}\right)^2 - \Delta l^2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

ここで、β は荷重に対するスケールファクターである。また Δl は増分値であり、ここでは超円の半径を表す。上式に式(20)と(21)を代入し、$\delta\Delta\lambda$ で整理すると、次の二次式が得られる。

$$a\left(\delta\Delta\lambda\right)^2 + 2b\delta\Delta\lambda + c = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}
a &= \Delta\mathbf{u}_{i+1}^T\Delta\mathbf{u}_{i+1} + \beta^2 \\
b &= \Delta\mathbf{u}_{i+1}^T(\Delta\mathbf{u}_i + \delta\Delta\mathbf{u}_2) + \beta^2\Delta\lambda_i \\
c &= (\Delta\mathbf{u}_i + \delta\Delta\mathbf{u}_2)^T(\Delta\mathbf{u}_i + \delta\Delta\mathbf{u}_2) + \left(\beta\Delta\lambda_i\right)^2 - \Delta l^2
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

である。二次方程式(25)を $\delta\Delta\lambda$ について解くと

$$\delta\Delta\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

として、$\delta\Delta\lambda$ が得られ、式(20)に代入すると、更新する増分変位ベクトルと増分荷重が得られる。二次方程式の 2 つの解のうち、第 $i+1$ 次と第 i 次の増分変位ベクトルとの交差角度で、小さい値の $\delta\Delta\lambda$ を採用する。なお、反復計算における収束条件はニュートン・ラフソン法と同様に式(18)を用いる。以上が、弧長法の概略説明である。