第２１話　静的問題における非線形解析 No.1

今回は、静的非線形応力問題において如何なる数値計算手法を用いて解を求めるかについてのお話しである。骨組構造では、有限要素法などを用いて、非線形の代数方程式に変換することを以前お話しした。ここでは、幾何学的非線形性を考慮した弾塑性解析を行う方法として、良く用いられる荷重増分法、変位増分法、ニュートン・ラフソン法及び弧長法について説明する。雑学というよりは非線形解析における基本知識である。分かり易く解説するのでお付合い願いたい。

非線形方程式の解を求める場合、一般に増分区間で行う。各増分区間で得られる解は、当然線形解ではないので一回の計算では誤差が生じる。この誤差を力で表現すると不釣合い力であり、この不釣合い力を十分に小さくする手法が各増分ステップで採用される。

静的釣合を表す非線形方程式は、一般的に次式で表される。

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで、$\mathbf{P}$ は荷重ベクトル、$\mathbf{K}(\mathbf{u})$ は非線形剛性である。上式を増分形式で表すと次式となる。

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{u}) &= \phi(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}(\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{P} \\ &= \Delta\mathbf{K}(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{P} = \mathbf{0}; \quad \Delta\mathbf{K}(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}(\mathbf{u}) \qquad \cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

ここで、$\Delta\mathbf{u}$ と $\Delta\mathbf{P}$ は増分変位と増分荷重である。上式中の $\Delta\mathbf{K}(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})$ は $\Delta\mathbf{u}$ で整理すると、次式で表される。

$$\Delta\mathbf{K}(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{u} + \psi(\Delta\mathbf{u}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

上式を式(2)に代入すると増分形の静的釣合式が得られる。

$$\Delta\phi(\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{u} + \psi(\Delta\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{P} = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで、$\mathbf{K}_T$ は接線剛性行列であり、また、$\psi(\Delta\mathbf{u})$ は増分変位 $\Delta\mathbf{u}$ に関する高次項を表す。

増分釣合式である式(4)の非線形項 $\psi(\Delta\mathbf{u})$ を無視し、線形の増分釣合式 $\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}$ を考える。一般的な増分法では、増分荷重に対し、増分釣合式を解いて増分変位 $\Delta\mathbf{u}$ を求め、この増分変位を足すと増分後の変位ベクトルは $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}$ となる。次ステップでは、この変位ベクトル $\mathbf{u}_{i+1}$ を用いて接線剛性 $\mathbf{K}_T$ を作り直す。幾何学的非線形を考慮した弾性部材の接線剛性 $\mathbf{K}_T$ は、

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\mathbf{u}_i) + \mathbf{K}_N(\mathbf{u}_i) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここで、$\mathbf{K}_L$ は線形剛性行列、$\mathbf{K}_G$ は幾何剛性行列、$\mathbf{K}_N$ は大変位剛性行列である。増分法では、このステップを次々と行うことによって、非線

形方程式を解くことになる。

増分法では、増分を非常に小さくしない限り、誤差が累積し、大変位状態では、大きな誤差が生じてしまう。そこで、増分法を少し修正して用いる方法、修正増分法が提案されている。

まず、得られた変位ベクトル $\mathbf{u}_i$ を非線形の釣合式(1)に代入する。

$$\phi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{P} - \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

上式は、非線形性を有するため、一般的に $\phi(\mathbf{u}_i)$ はゼロベクトルにはならず、誤差を生じる。そこで、この誤差ベクトルを次ステップで解消するために増分釣合式を変更する。ただし、非線形剛性 $\mathbf{K}(\mathbf{u}_i)$ の替わりに、部材の弾塑性状態を考慮して材端応力 $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)$ を用いる。従って、式(6)は、$\phi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{P} - \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)$ となり、不釣合い力と呼ばれる。不釣合い力 $\phi(\mathbf{u}_i)$ を次ステップで解消するため、次ステップの増分釣合式を以下のように変更する。

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P} + \phi(\mathbf{u}_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

修正増分法は、ここで得た増分変位を繋げることで、非線形方程式の解としている。

静的釣合式は、荷重パラメータ λ を用いて、次式で表す場合が多い。

$$\phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{P} - \mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

増分荷重パラメータ $\Delta\lambda$ を用いた修正荷重増分法は、式(7)より

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u} = \Delta\lambda\mathbf{P} + \phi(\mathbf{u}_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

となり、荷重増分法は、$\Delta\lambda$ を適宜設定し、上式を解く事によって増分変位 $\Delta\mathbf{u}$ を求める。

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}_T^{-1}(\Delta\lambda\mathbf{P} + \phi(\mathbf{u}_\mathbf{i})) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

上式の逆行列 $\mathbf{K}_T^{-1}$ が得られない場合、分岐座屈や屈服座屈を生じるときであり、特別な扱いが必要となる。

骨組に大変位が生じるとき、一般に同じ増分荷重に対しても増分変位が増大し、解析誤差が大きくなる。そこで、任意点の変位 $\Delta\mathbf{u}_s$ を増分することで、増分荷重パラメータを逆に求める手法、変位増分法が考えられる。まず、釣合式(8)を次の 2 式に分解する。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}_1 &= \mathbf{P} \\ \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}_2 &= \phi(\mathbf{u}_i) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

2 式の解を各々 $\Delta\mathbf{u}_{1s}$ と $\Delta\mathbf{u}_{2s}$ とすると、設定した任意点の増分変位 $\Delta\mathbf{u}_s$ は、$\Delta\mathbf{u}_s = \Delta\lambda\Delta\mathbf{u}_{1s} + \Delta\mathbf{u}_{2s}$ で、また $\Delta\lambda$ 及び $\Delta\mathbf{u}$ は次式で求められる。

$$\left.\begin{aligned} \Delta\lambda &= (\Delta\mathbf{u}_s - \Delta\mathbf{u}_{2s}) / \Delta\mathbf{u}_{1s} \\ \Delta\mathbf{u} &= \Delta\lambda\Delta\mathbf{u}_1 + \Delta\mathbf{u}_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

上記によって、増分変位に対する解が求められる。変位増分法は、接線剛性が小さいとき、つまり行列式の値が小さいときに用いられる。