第２話　せん断ひずみがあるとどうなるの

左の式の誘導は構造力学のテキストを参照されたい。ここでは、このように与えられるとして先に進もう。

梁が曲げモーメントを受ける際、その軸方向変化率に関連して、断面内にはせん断力 $Q = dM / dx$ が発生し、せん断応力分布 $\tau(y)$ が生じる。まず、このせん断応力分布を求め、次に対応するせん断ひずみを考慮すると、断面の形状や応力分布にどのような影響があるか考えてみよう。

右の長方形断面を材軸方向に dx の幅で切断し、断面内応力による軸方向の釣り合いを考えると、次式でせん断応力が求められる。

$$\tau(y) = \frac{Q}{I_z b(y)} S(y)$$

ここで、$b(y)$ は断面巾、$S(y)$ は z 軸に関する y より外の断面の断面一次モーメント、I_z は z 軸に関する断面二次モーメントを表す。上式から分かるようにせん断応力分布は、断面形状によって変わる。

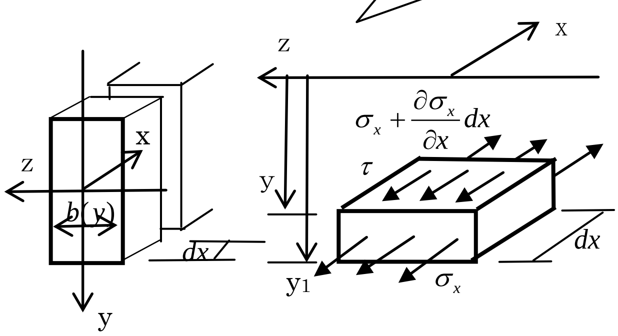


図 1 断面内応力

例えば、梁幅 b でせい D の矩形断面のせん断応力分布は、

$$\tau(y) = \frac{3Q}{2A}(1 - (\frac{2y}{D})^2)$$

で与えられ、断面の上端と下端でゼロ、中央で最大となる放物線となる。また、最大せん断応力は上式に $y = 0$ を代入すると、次のように平均せん断応力の 1.5 倍となる。

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0; \quad k = 1.5; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A}$$

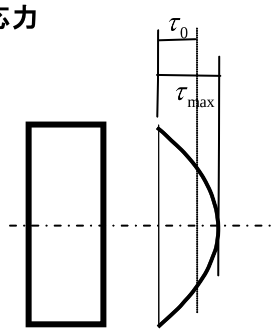


図 2 矩形断面内せん断応力

断面が右図のように不連続に変化すると、上で求めた手法を用いると応力分布も不連続となり、不適切な分布状態となる(図 3 参照)。そこで、異なった手法として**せん断流れ理論**を用いる。この理論によってせん断応力分布を求めると、図 4 のように断面の不連続点においてもせん断応力の釣り合いが得られることになる。

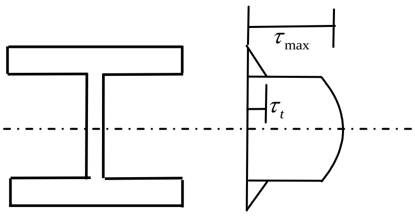


図 3 H 型断面せん断応力分布

曲げモーメントによる断面内のせん断応力分布は、断面中心で最大値となる放物線となり、上式で求められる。断面形状の違いは、せん断変形の係数 κ で吸収する。何とうまい方法だ。

ベルヌーイ・オイラー仮定から曲げモーメントによる軸方向応力を決定し、断面内の力の釣合よりせん断応力分布を求めた。一方、せん断応力は弾性条件 $\gamma = \tau / G$ からせん断ひずみ γ を生じさせる。せ

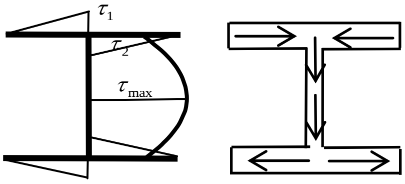


図 4 せん断流れ理論による
H 型断面せん断応力分布

ん断ひずみの分布はせん断応力に比例し、例えば矩形断面では放物線となり、結果、断面は反る。このことは、平面保持及び法線保持の仮定と明らかに矛盾する。

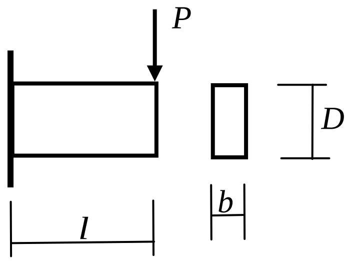
断面内の応力分布と変形状態を簡単な例、図 5(a)に示す片持ち梁で考えてみよう。曲げモーメントによってせん断ひずみが発生し、軸方向変位は、曲げモーメントによる軸ひずみ（平面保持を仮定しているために直線となる）にせん断ひずみが付加されて同図(d)のような変形状態となる。

曲げモーメントによって生じる矩形断面のせん断ひずみは軸方向変位を生じさせる。その軸方向変形は平面問題におけるせん断応力と変位の関係$\gamma = du/dy + dv/dx$より、断面内のせん断応力と$\gamma = \tau / G$を用いて 0 からyまで積分することによって得られる。得られた軸方向変形は、図心位置で 3 次の逆対称関数となる。つまり、せん断ひずみを考慮すると変形後では、明らかに平面保持の仮定が成立しないことになる。通常の梁理論として用いられる Bernouilli-Euler（ベルヌイ‐オイラー）梁ではせん断剛性Gを無限大としており､せん断応力は発生するが、せん断ひずみは生じないとしている。このことで理論上の矛盾が回避されている。

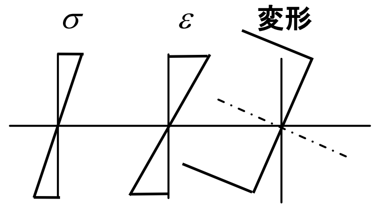
曲げひずみに比較してせん断ひずみが無視できない場合がある。例えば、部材長さに比較して梁せいが大きくなる場合である。このようなときにはせん断ひずみを考慮しなければ解析精度が低下する。ただし断面に上述で得たような高次のせん断変形を許すと梁理論が複雑となる。そこで、図 6 のように断面の反り変形を平均化した平面と軸線とのなす角を採用し、見かけ上のせん断ひずみ（ここではせん断変形角と呼ぶ）を用いる。この仮定は法線保持を満足しないが、断面内のせん断ひずみが一定となるため、平面保持の仮定は満たされることになる。図心でのせん断変形角の大きさは適切に評価する必要がある。一般的には、エネルギー等値の手法を用いて決定される。

この梁の支配方程式はたわみに関する以下の 4 階微分方程式であり、4 個の境界条件を用いて方程式を解き、評価されることになる。このせん断変形を許す微分方程式はせん断ひずみの仮定を含めて Timoshenko 梁理論と呼ばれている。この梁理論については後日、もう少し詳しく触れることにしよう。

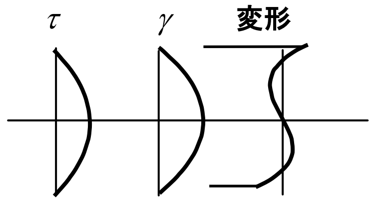
$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p_y}{EI} - \frac{\kappa}{GA}\frac{d^2 p_y}{dx^2}$$



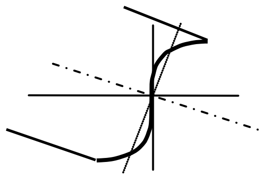
(a) 片持ち梁に集中荷重



(b) 曲げによる応力とひずみ



(c) せん断応力とひずみ



(d) 断面の変形状態

図 5 断面内の応力と変形

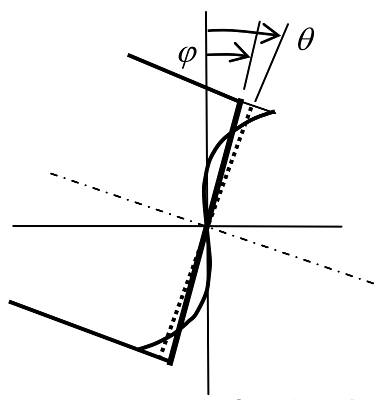


図 6 せん断変形を許す断面の変形状態