第１３話　座屈と固有値問題

今回は、座屈についてお話しする。座屈といえば、細長い棒を上から徐々に押したとき、ある時、急に大きく横にたわむ現象が思い浮かぶ。この現象はオイラー座屈と呼ばれ、オイラー(Leonhard Euler:1707−1783)によって、250 年前に求められた。座屈現象は、応力が圧縮状態にあると常に起こり得る。一般に部材が細長いか、プレートが薄くて広いと塑性耐力に達する前に、この種の弾性座屈を生じる。

ここでは、オイラー座屈を振り返り、固有値問題と如何に関わっているか、について考えてみよう。図 1 に示す一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平拘束）支持で、材軸方向に集中荷重 P が作用している場合について考える。同図には座屈する瞬間の状態が示されており、モーメントの釣合は変形後の変位 $v(x)$ を用いて行う。変形後の変位を使用していることから幾何学的非線形性を考慮していることになる。

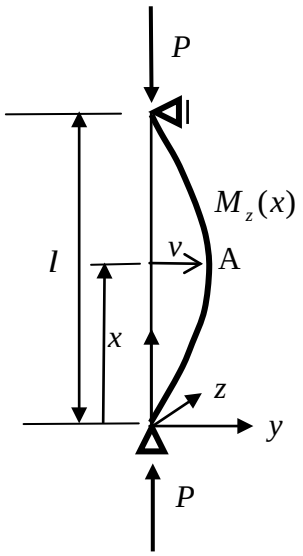

図 1 オイラー座屈

座標原点から x 離れた点 A におけるモーメントの釣合は、

$$-M_z(x)+v(x)P=0$$

で与えられ、さらに、梁の微分方程式を代入し、$k^2=P/EI_z$ とおくと、上式は以下となる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}+k^2v=0$$

上式は、変位関数 $v(x)$ に関する 2 回の微分方程式で、右辺の定数項がない。この同時微分方程式が連続体の固有値問題と呼ばれる。

上式の解は一般解に剛体変位を加えると下式で与えられる。

$$v=A\cos kx+B\sin kx+Cx+D$$

一端ピン・他端ローラー支持に対する境界条件を用いると、固有値としての座屈荷重が以下のように求められ、

$$P_{cr}=EI_zk^2=(\frac{n\pi}{l})^2EI_z;\quad (n=1,2,3\cdot\cdot)$$

固有ベクトル関数としての座屈モードが次式で与えられる。

$$v(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad (n=1,2,3\cdot\cdot)$$

固有値は、n の値を次々と与えると飛び飛びに、しかも無限に得られる。$n=1$ とした最小固有値 $P_{cr}=(\pi/l)^2EI_z$ が、実際の座屈荷重となる。固有値に対応する固有ベクトル関数は *SIN*（正弦)波となり、$n=1$ の座屈荷重に対応して *SIN* 半波の $\sin(\pi/l)x$ が座屈モードとなる。

実際の骨組構造物では、連続体の固有値問題を用いて座屈荷重を求めることは難しい。そこで有限要素法などで離散化し、代数方程式による固有値問題を導く。オイラー座屈で述べたように、座屈問題は幾何学的非線形性を考慮するため、次の変位とひずみの非線形関係を用いる。

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} - y\frac{d^2v}{dx^2} - z\frac{d^2w}{dx^2}$$
$$= \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa$$

ここで、ε_L は線形ひずみ、ε_N は非線形ひずみ、κ は曲げによる線形ひずみである。固有値問題を導くために、増分形式で表した釣合式に以下の操作を行う。まず、座屈前は変形が小さいとして高次微小項を無視すると、次式が得られる。

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T \cdot E \cdot \Delta\varepsilon_L dV + \int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T \cdot \sigma_x dV = 0$$

上式において λ 倍の荷重が載荷され、応力が生じた状態で、増分荷重がなくても変位が生じる、つまり不安定となるとすると、上式は

$$\mathbf{K}_L\Delta\mathbf{u} + \lambda\mathbf{K}_G\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

となり、代数型の固有値問題が得られる。上式の線形剛性 $\mathbf{K}_L$ と幾何剛性行列 $\mathbf{K}_G$ は次式で与えられる。

$$\int_V \left\{\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T \cdot E \cdot \Delta\varepsilon_L\right\} dV = \mathbf{K}_L\Delta\mathbf{u}$$
$$\int_V \left\{\delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T \cdot \sigma_x\right\} dV = \mathbf{K}_G\Delta\mathbf{u}$$

幾何剛性は、まず線形の剛性行列を求め、次に荷重ベクトル $\mathbf{P}$ に対する応力 σ_x を求め、さらに、この応力から各部材の幾何剛性行列を作成し、全体幾何剛性行列を構築する。上記 2 つの剛性行列から固有値問題を解き、座屈荷重と座屈モードを求める。得られる固有値は荷重ベクトルに対する倍率であり、実際の座屈荷重は、$\mathbf{P}_{cr} = \lambda_{cr}\mathbf{P}$ となる。ただし λ_{cr} は最小固有値である。

次に、求めた座屈荷重の精度について考えてみよう。骨組が座屈する前に塑性化し、不安定化する場合、上記の固有値問題から求めた座屈荷重はかなり高い値となる。また、アーチやドーム状のスペースフレームなどは、座屈前の非線形性挙動が大きく、やはり上記の座屈荷重は高めとなる。つまり座屈前が弾性線形変形で座屈形状が分岐型の場合、固有値問題から得られる座屈荷重は、精度が良い。一般的に、変位法の解は理論解より高い。例えば、オイラー座屈を有限要素法による固有値問題で解くと、座屈モードが *SIN* 波形に近づくほど理論解に高いほうから近づく。つまり座屈荷重は高い方から厳密解に近づくことになる。