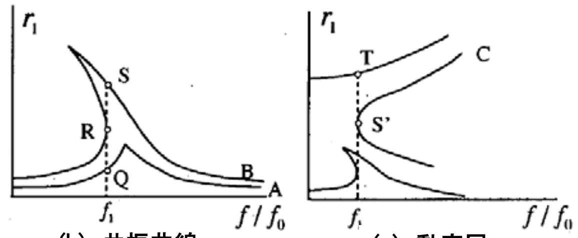
第１２０話　幾何学的非線形と動座屈 No.3

今回も、幾何学的非線形性による構造物の動座屈、特に周期外乱を受ける扁平アーチの動座屈についてのお話しである。まず図 9 を用いて、周期外乱を受ける扁平アーチの共振による振幅のジャンプ現象と動座屈現象を説明する。一定振幅の比較的小さなSine型の周期外乱を扁平アーチが受けた場合、その応答曲線は同図(a)の A 線となる。注目する振動数 f_1 に対する応答は A 線上の Q 点で示される。荷重振幅が大きくなると、応答曲線は同図の B 線となり、応答値は R 点に移動する。さらに荷重が大きくなると、応答は不安定となり R 点から突然 S 点にジャンプする。この不連続性が振幅の動的ジャンプ現象といわれ、非線形振動では通常良く見られる。荷重がさらに増加すると扁平アーチのような構造物では(同図(b)、応答は S'点でやはり不安定となり、S'点から T 点に大きくジャンプする。この最後のジャンプでアーチは動座屈を起こし、大変形を生じる。



(b) 共振曲線　　(a) 動座屈

図 9 共振曲線と動座屈

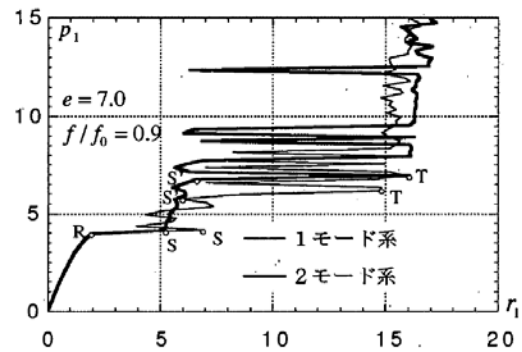


図 10 荷重と最大応答変位関係

上記の説明より、その振動特性として2種類のジャンプ現象が存在することが分かる。実際に数値計算し、その動荷重—最大変位曲線を描くと(図10)、2つのジャンプ現象は図中のR-SとS'-T間に見られる。周期外乱はSine型で、振動数は対称モードの線形固有振動数の90%とした。図中の細線、太線はそれぞれ1モード系と2モード系を表す。縦軸は荷重の振幅を、横軸は第1次モードの変位を示す。2モード系では、動座屈メカニズムは分岐型であり、その座屈荷重は1モード系の屈服座屈荷重より低い。これらの動座屈現象は荷重が大きくなると、いずれの振動数領域でも出現するが、特に対称モードの主共振（線形の固有振動数）近傍では、動座屈荷重は大きく低下する。また、この種の主共振ほど大きくないが、分数調波や高調波の共振域あるいは第2次モードの共振域にも見られる。

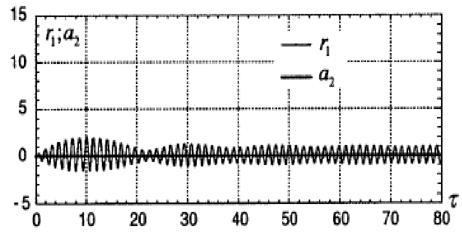


図 11(a) 時刻歴　定常状態

（$p_1 = 4.0; e = 7$）

周期外乱を受ける非保存系でも、保存系の動座屈と同様、分岐型と屈服型の座屈メカニズムが存在する。ただし、Astatic 座屈荷重のような明確な座屈荷重の下界は見当たらない。共振現象によって応答が増大するため、共振の主要なパラメータである外乱振動数と系の減衰定数が動座屈荷重に大きく影響する。これらの

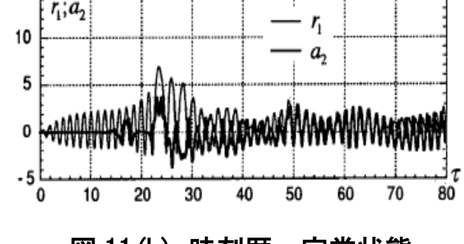


図 11(b) 時刻歴　定常状態

（$p_1 = 4.15; e = 7$）

座屈メカニズムを振動時刻歴と位相図を用いて詳しく分析する。周期外乱の振動数は、一定で線形の固有振動数の 90%とした。

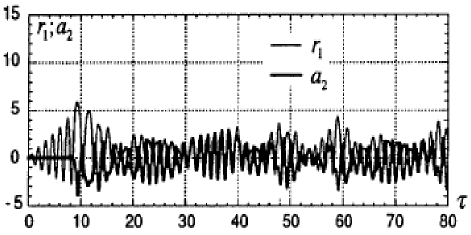


図 12 時刻歴（$P_1=5.8; e=7$）

図11は各外乱振幅に対する変位時刻歴である。外乱振幅が比較的小さいとき、振動状態は非線形性を示さず、数回の過渡応答が現れた後、定常状態となる(同図(a))。しかし、非対称変位が励起されると、図(b)に示されるように対称変位は定常状態とはならず、うなりに似た現象で振幅が変化する。同じく非対称変位も脈動を繰り返す。さらに外乱が大きくなると、過渡応答によって対称モードの変位が増大していく過程で非対称モードが出現し、分岐座屈を生じる(図(c))。多くの場合、1回目の過渡応答のときが対称モードの振幅が最も大きくなり、この際、動座屈を引き起こす。この現象は分岐型の動座屈と呼ばれる。

次に、動座屈のメカニズムについて分析する。動座屈前後の振動波形と位相図を2モード系について、図12と13に示す。図12のように動座屈前より非軸対称モードが出現しているが、未だ動座屈には至っていない。しかし、外乱振幅が少し増加すると、図13に示されるように対称モードと非対称モードが連成し、その後、動座屈を起こすことになる。このように荷重の少しの違いと計算に用いた振動時間によって、座屈するか否かが分かれてしまう。これは分岐動座屈の特徴の一つであり、限界荷重や限界振動の決定に不安定要因として影響を及ぼす。また、位相図から分かるように、解軌道は高いポテンシャルの鞍点（同図(b)の△印）の近傍を迂回し、低いポテンシャルの鞍点（同図(b)の□印）の近傍を通過することで、典型的な分岐型座屈メカニズムによって動座屈する。

一方、図14には、屈服型の座屈メカニズムが示される。外乱の振幅が大きい場合、非対称モードが現れる前に屈服型の動座屈を生じる。同図(b)の位相図に典型的な様子が示されている。解軌道は、座屈点で非対称モードがゼロのままで前述の鞍点（△印）近傍を通過し、その後対称モードの変位が急激に増大し、動座屈を生じる。一般的に荷重が小さいときは分岐型で、また比較的大きくなると非軸対称変形が生じる前に、屈服型のメカニズムで動座屈を起こす。

動座屈現象は複雑で、理論的に特徴を把握するのは難しい。

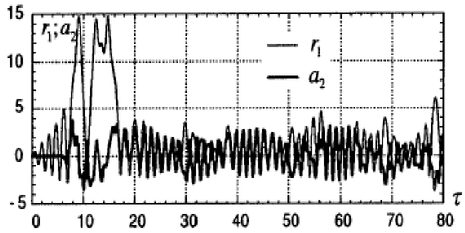


図 11(c) 時刻歴　定常状態
（$p_1=7.0; e=7$）

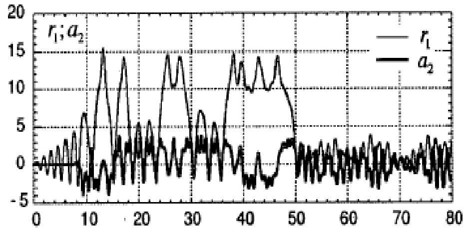


図 13(a) 時刻歴（$P_1=5.9; e=7$）

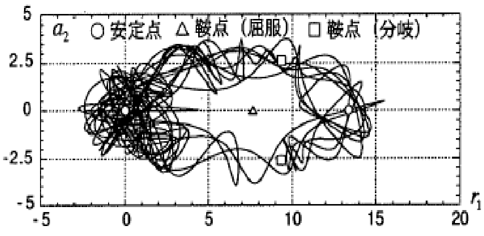


図 13(b) 位相図（$P_1=5.9; e=7$）

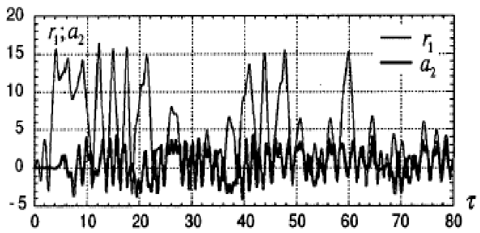


図 14(a) 時刻歴（$P_1=15.0; e=7$）

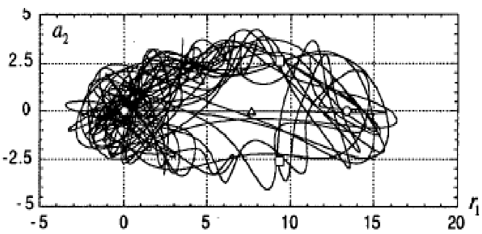


図 14(b) 位相図（$P_1=15.0; e=7$）

鞍点（サドルポイント）とは、ポテンシャンを各変位で展開したとき、一部の変位方向に負の勾配を有する静的釣合点である。この鞍点では微小な変位を加えて振動させると、変位は大きくなり、不安定な振動状態を示す。