



第12話 サンプナンの捩じり理論

今回は部材を捩った場合、どのようになるかについて考えてみよう。部材を捩るとき、その断面形状によって捩じり状態が異なる。まず、捩じりの状態を分類しておこう。曲げがない状態で梁を捩じったとき、つまり純捩じりの状態で、断面が反る（そる）場合と反らない場合に分ける。前者を **St.Venant(サンプナン)の捩じり** といい、後者において部材の端部を反り拘束すると軸方向応力が発生するが、この捩じりを **Wagner(ワグナー)の捩じり**、あるいは **曲げ捩じり** という。

ここでは、まず **St.Venant** の捩じりについてお話しする。最も単純である半径 R の円形断面を捩じってみよう。断面内の各位置は円周方向に回転変位し、変形前平面であった断面は捩じられた後も平面を保つ。このとき軸方向の変位は生じない。このような捩じりを **単純捩じり** と呼ぶ。

単純捩じりの状態で、断面の中心軸から半径 r の距離にある円筒面を考え、その表面におけるせん断ひずみ γ 及びせん断応力 τ は、次式で与えられる。

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx} \rightarrow \tau = G\gamma = Gr \frac{d\theta}{dx}$$

ここで、 θ は捩じり角、 $d\theta/dx$ は捩じり率、 G はせん断弾性係数を示す。この単純捩じりでは、断面に働くせん断応力は同心円状に分布し、円弧の方向に向く。また、せん断応力は同一半径 r 上では同一の値となる。断面に働く捩じりモーメント M_T は、断面内のせん断応力に中心からの距離 r を掛け、その値を断面全体で積分することで以下のように求められる。

$$M_T = \int \tau r dA = G \int r^2 \frac{d\theta}{dx} dA = G \frac{d\theta}{dx} \int r^2 dA = GI_p \frac{d\theta}{dx}; \quad I_p = \int r^2 dA$$

ここで、 I_p は断面二次極モーメントであり、円形断面では $I_p = \pi R^4 / 2$ となる。釣合式は、断面二次極モーメントを用い、整理すると

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{GI_p}$$

ここで、 GI_p を **St.Venant** の捩じり剛性という。せん断応力は、次式で与えられる。

$$\tau = \frac{M_T}{I_p} r$$

このせん断応力の分布は図1に示されるように同心円となる。

回転対称断面の捩じりは単純で理解し易い。これが任意形状の断面ではそれほど単純ではなく、厳密な解析は弾性論によらなければならない。

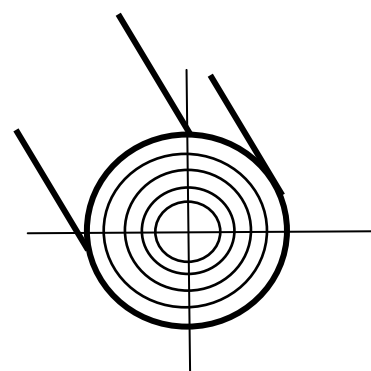


図1 回転対称断面の捩じり応力

ここでは、基本的な考え方を紹介する。まず、回転対称でない断面を回転中心で捩じる場合を考える。もし、回転対称断面と同様に平面を保ったまま捩じると図2(a)に示す同心円状のせん断応力分布が得られるはずである。しかしながら、断面の縁付近では、同図(b)のようにせん断応力 τ は側面に平行な応力 τ_t と垂直な応力 τ_n に分解されるが、垂直応力 τ_n に釣合う外力がないため、このような応力状態は正しくない。この応力に釣合うためには、断面に垂直なせん断応力 τ' を必要とし、その結果、このせん断応力によって断面は平面を保てず、**反る(Warping)**ことになる。

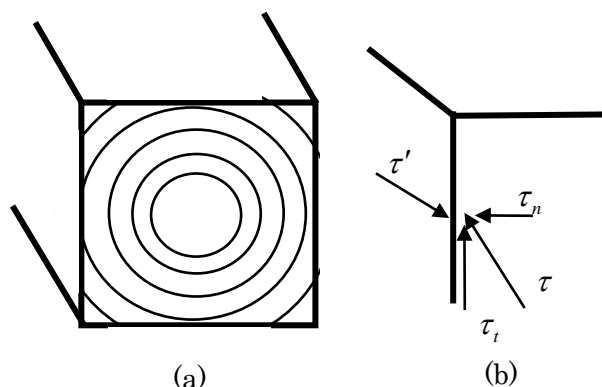


図2 非回転対称断面の不正確な捩じり応力分布

この問題を厳密に解くには弾性論による解析が必要となる。せん断応力の方向は、図3のように周辺に沿って平行に流れる。このせん断応力の方向と大きさに関し、石鹼膜類似の法則が成立する。解析対象の断面形に石鹼膜を張り、軽く一様に押すと膜は膨らみ、その等高線がせん断応力の方向であり、勾配がせん断応力の大きさに比例する。特に薄肉断面では、石鹼膜は両端近傍を除いて、その膜の形状は板厚方向に二次曲線となり、せん断応力の大きさは一次分布となる。

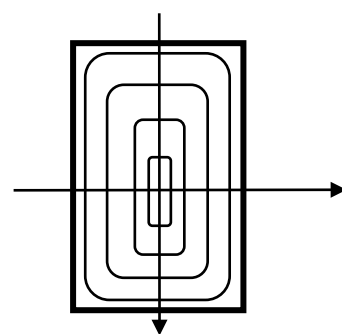


図3 捩じりを受ける矩形断面のせん断応力の分布

次に、薄肉断面で構成された断面に、捩じりが作用するとき発生するせん断応力について考える。ここでは、上記と同様に捩じりによる反りが拘束されていないとする。膜類似の方法によれば、細長い矩形断面では直感的に捩じりの状態を把握できる。幅 b が板厚 t に比較して非常に大きい場合は、長辺端部の近傍を除いて全て同一の応力分布を示す。その際、せん断応力は $\tau(z) = 2Gz\phi$; $d\theta/dx = \phi$ で表され、図4で示されるように応力分布は板厚方向に直線的に変化し、断面中心線で逆対称となる。最大応力は板の縁周辺で $\tau_{max} = Gt\phi$ となる。

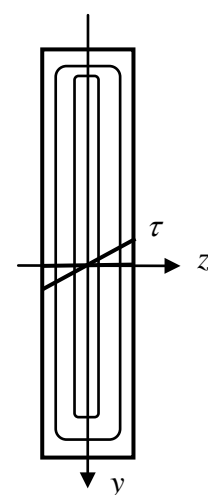


図4 薄肉開断面の捩じりを受けたときのせん断応力分布

薄肉断面の捩じりモーメント M_s と捩じり率 ϕ の関係は $M_s = GJ\phi$ で与えられ、ここでも GJ はSt.Venantの捩じり剛性と呼ばれる。ただし、非常に薄い矩形断面では、捩じり定数は $J = bt^3/3$ として、より精度の良い値が $J = bt^3(1 - 0.63t/b)/3$ として提案されている。型鋼のように細長い矩形板で構成される断面の捩じり剛性は、石鹼膜類似の方法によれば、各板要素の捩じり剛性の和で与えられることが知られている。従って、捩じり定数は次の各板の捩じり定数の和で得られる。

$$J = \sum J_i; \quad J_i = \frac{1}{3} b_i t_i^3 (1 - 0.63 \frac{t_i}{b_i})$$