



第 118 話 幾何学的非線形と動座屈 No.1

今回は、幾何学的非線形性による構造物の動座屈についてお話する。これまでに構造物の動的な非線形挙動の特性についてお話した。大空間構造物の動的安定問題は保存系については数多くの研究がなされ、その動的挙動についてはかなり知られるところとなった。一方、非保存系での動的挙動は複雑で、現在でもその挙動を知ることはかなり難しい。ここでは、扁平アーチを用いて動座屈現象を詳細に分析してみよう。

扁平アーチの動的特性を分析する前に、静的な座屈荷重とライズパラメータ e との関係性を復習しておこう。静的座屈解析の結果を図 1 に示す。ただし、ここでは 2 モード系で、荷重は図 2(b) に示す対称荷重のみとする。同図には、 e をパラメータとして屈服座屈荷重 (S_1 曲線)、分岐座屈荷重 (S_2 曲線)、Astatic 座屈荷重 (A_1 、 A_2 曲線) が示される。Astatic 座屈荷重については後述する。ライズパラメータ e に関連して、動的座屈メカニズムは次の 4 つに分類される。

- 1) $e \leq 2$ の場合 (A 領域) : アーチは扁平であり、座屈現象を起こさない。
- 2) $2 < e < 4$ の場合 (B 領域) : 第 1 次モードで屈服座屈を起こし (S_1)、第 2 次モードの変位は出現しない。
- 3) $4 < e < \sqrt{22}$ の場合 (C 領域) : まず、屈服座屈を生じ (S_1)、その後、第 2 次モードで分岐座屈を起こす (S_2)。
- 4) $e \geq \sqrt{22}$ の場合 (D 領域) : 分岐座屈によって不安定となる (S_2)。

Astatic 座屈荷重は、ステップ荷重による動座屈荷重の下界を与え、全ポテンシャルエネルギーより理論的に求められる。詳しくはテキストを参照されたい。この結果、Astatic 座屈荷重は、図 1 に示される 3 領域に分かれており、これらの領域では以下のようにステップ荷重による動座屈特性が異なることになる。

- 1) E 領域では動座屈は生じない。
- 2) F 領域では屈服型の動座屈を生じる。
- 3) G 領域では分岐型の動座屈を生じる。

ここで使用する解析モデルは、形状 Sine 型で両端ピン支持、変形場として対称モードと逆対称モードの 2 つを用いる。図 2 に示す荷重は対称荷重のみとする。動荷重として、ステップ荷重は $q(\xi, \tau) = -p_1 \sin \xi$ 、

SIN 型扁平アーチの形状 w_0 、あるいは無次元化された形状 η_0 は、次式で与えられるものとする。

$$\eta_0 = e \cdot \sin \xi \quad (0 \leq \xi \leq \pi)$$

$$w_0 = \rho e \cdot \sin \xi$$

$$e = w_{0\max} / \rho$$

ここで、 e はアーチ形状のライズを表すパラメータである。

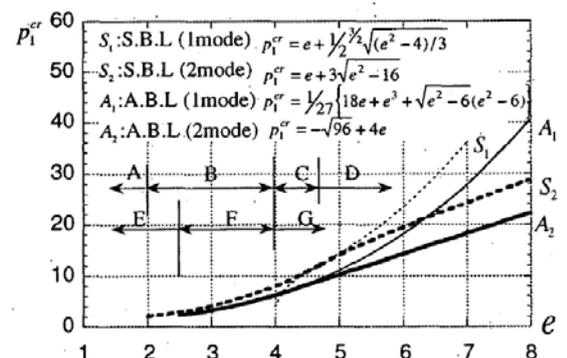
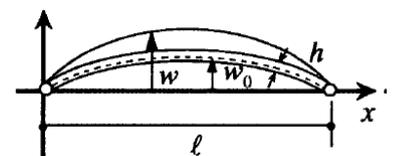
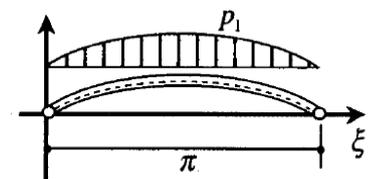


図 1 ライズパラメータ e と座屈荷重の関係



(a) アーチ形状と変形場



(b) 荷重と無次元表示

図 2 扁平アーチの形状と法線方向荷重

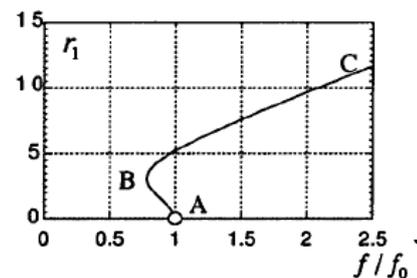
周期外乱は $q(\xi, \tau) = -p_1 \sin \xi \cdot \sin(2\pi f \tau)$ と $q(\xi, \tau) = -p_1 \sin \xi \cdot \cos(2\pi f \tau)$ である。数値解析は Newmark の β 法を用い、 β は 1/4 を使用する。減衰はレーリー型を用い、1 次、2 次共に 1% とする。モデルのライズパラメータは主に $e = 7.0$ を用いるが、その場合、静的座屈メカニズムは分岐型となる。実際のアーチはライズパラメータ e が大きくなると、より高次のモードが最小固有振動数となるが、ここでは、ライズパラメータの有効範囲を限定し、2 モード系で精度が得られる場合を扱っている。

骨格曲線（バックボーン曲線）は、無減衰の自由振動時において、定常状態の振幅と振動数との関係を示すものである。しかし、有限変形の非線形振動では、振動中に各種の振動数の波が出現し、定常状態にならない場合があることから骨格曲線の定義を次のように変更する。振幅は過渡応答を含めた全振動中、静的釣合点からの最大変位とする。また、振動数は各最大変位間の時間を測定し、それらの平均値を用いて評価する。さらに、骨格曲線は初期変位を徐々に大きくして応答計算を実施し、上記の定義を利用して振動数と振幅の関係を求めることにする。

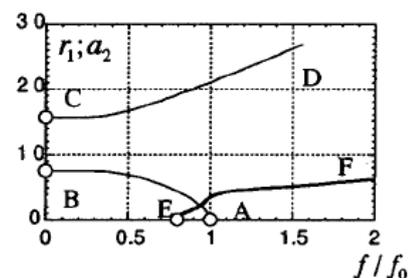
図 3 は上記の方法によって求めた 2 次モード系の骨格曲線を示す。縦軸は振幅を、横軸は振動数 f を第 1 次モードの線形固有振動数 f_0 で除した無次元振動数で表す。同図(a)はライズパラメータが 1.9 の場合であり、対称変形を示す第 1 次モードの骨格曲線である。曲線は振幅が大きくなるに従って振動数が低くなり、ソフトニングの振動性状を示す。さらに振幅が大きくなると曲線は反転し、逆に振動数は高くなり、ハードニング型となる。

ライズパラメータ $e = 7$ の場合(同図(b))、対称モードの無次元化固有振動数は 0.804、非対称モードでは 0.637 となる。ここで曲線 A-B と C-D は対称モード、曲線 E-F は非対称モードの骨格曲線を表す。対称モードの骨格曲線は、B 点から C 点にかけて不連続となるが、これは骨格曲線のジャンプ現象と呼び、インパルス荷重による動座屈現象に相当する。不連続性は系の全ポテンシャルに依存し、ライズパラメータによって現れる場合と、現れない場合とがある。この現象は静的釣合曲線を観察することで容易に理解できる。例えば、図 4(a)のように、下位降伏点が $q = 0$ より高い場合はジャンプ現象が生じず、逆に同図(b)のように下位降伏点が $q = 0$ より低い場合はジャンプ現象が生じる。振動特性として、A-B 間はソフトニング型を、また C-D 間及び E-F 間はハードニング型を示す。

不連続の骨格曲線をさらに分析するため、次回、図3(b)を詳細に示した図5(a)と位相図(b)を用いて説明する。

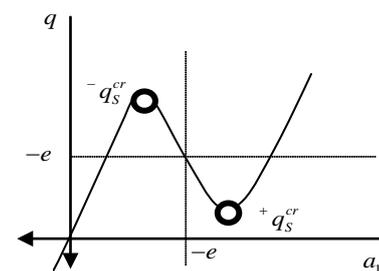


(a) $e = 1.9$ の場合

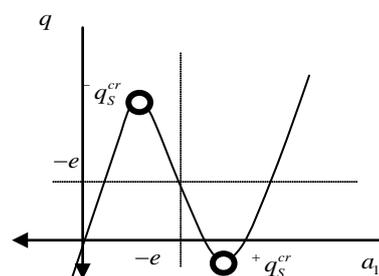


(b) $e = 7.0$ の場合

図 3 モード系の骨格曲線



(a) 骨格曲線にジャンプ現象が生じない場合



(b) ジャンプ現象が生じる場合

図 4 扁平アーチの屈服座屈を表す釣合曲線