第１１７話　制振装置の Maxwell モデル No.2

今回も制振装置のモデル化で使用される Maxwell モデルについてお話しする。構造物全体の振動方程式において、数値計算における各時間ステップで、Maxwell モデルの基本式は常に成立する。当然 n ステップと $n+1$ ステップでも成立しており、基本式(12)は次式となる。ここで、$P_j(n)$ などは n ステップの値を意味する。

$$\left.\begin{aligned}\dot{P}_j(n)+\frac{k}{c}P_j(n)&=k(\dot{x}_j(n)-\dot{x}_i(n))\\ \dot{P}_j(n+1)+\frac{k}{c}P_j(n+1)&=k(\dot{x}_j(n+1)-\dot{x}_i(n+1))\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

上の 2 式を加えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\dot{P}_j(n+1)+\dot{P}_j(n)+\frac{k}{c}(P_j(n+1)+P_j(n))\\ &\quad=k(\dot{x}_j(n+1)-\dot{x}_i(n+1)+\dot{x}_j(n)-\dot{x}_i(n))\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(15)$$

今、n ステップの部材内部の応力 f_n が求まっていると仮定し、Δt 秒後の応力 f_{n+1} を求めるために、次のようにテーラー展開して、2 次の項 $f_{n+1}=f_n+\dot{f}_n\Delta t+\ddot{f}_n\Delta t^2/2$ までを採用する。ここで、f_n の 2 回時間微分を次の差分 $\ddot{f}_n=\left(\dot{f}_{n+1}-\dot{f}_n\right)/\Delta t$ で仮定し、整理すると次式が得られ、

$$f_{n+1}=f_n+\frac{\Delta t}{2}(\dot{f}_{n+1}+\dot{f}_n)\qquad\cdots\cdots(16)$$

さらに、節点力 $P_j(n+1)$ も同様に次式で表すことができる。

$$P_j(n+1)=P_j(n)+\frac{\Delta t}{2}(\dot{P}_j(n)+\dot{P}_j(n+1))\qquad\cdots\cdots(17)$$

上式を用いて、式(15)の $\dot{P}_j(n),\dot{P}_j(n+1)$ を消去し、得られた結果を整理すると、$P_j(n+1)$ が求められる。

$$P_j(n+1)=\left(-a_1,a_1\right)\begin{Bmatrix}\dot{x}_i(n+1)\\ \dot{x}_j(n+1)\end{Bmatrix}+\left(-a_1,a_1\right)\begin{Bmatrix}\dot{x}_i(n)\\ \dot{x}_j(n)\end{Bmatrix}+b_1P_j(n)\qquad\cdots\cdots(18)$$

ここで、

$$a_1=\frac{kc\Delta t}{2c+k\Delta t};\quad b_1=\frac{2c-k\Delta t}{2c+k\Delta t}\qquad\cdots\cdots(19)$$

$P_i(n+1)$ も同様に表すと、

$$P_i(n+1)=\left(a_1,-a_1\right)\begin{Bmatrix}\dot{x}_j(n+1)\\ \dot{x}_i(n+1)\end{Bmatrix}+\left(a_1,-a_1\right)\begin{Bmatrix}\dot{x}_j(n)\\ \dot{x}_i(n)\end{Bmatrix}+b_1P_j(n)\qquad\cdots\cdots(20)$$

式(18)と(20)をまとめると、Maxwell モデルの数値計算用の基礎式が得られる。この基礎式を骨組全体の釣合式に組み込み、振動方程式を求めることになる。

$$\begin{Bmatrix}P_i(n+1)\\ P_j(n+1)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&-a_1\\ -a_1&a_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_i(n+1)\\ \dot{x}_j(n+1)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}f_{di}\\ f_{dj}\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(21)$$

$$f_d(n)=\begin{Bmatrix}f_{di}(n)\\ f_{dj}(n)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&-a_1\\ -a_1&a_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_i(n)\\ \dot{x}_j(n)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1&0\\ 0&b_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_i(n)\\ P_j(n)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_1\dot{u}+b_1f_n\\ -a_1\dot{u}+b_1f_n\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(22)$$

骨組全体の釣合式を解き、$n+1$ ステップの節点変位 x_i, x_j と速度 $\dot{x}_i, \dot{x}_j$ が求まった後、次式を用いて要素応力 f_{n+1}、要素変位と速度 $u_1, u_2, \dot{u}_1$ を求めることになる。

$$\left.\begin{aligned} f_{n+1} &= P_j(n+1) = (-a_1, a_1)\begin{Bmatrix} \dot{x}_i(n+1) \\ \dot{x}_j(n+1) \end{Bmatrix} + (-a_1, a_1)\begin{Bmatrix} \dot{x}_i(n) \\ \dot{x}_j(n) \end{Bmatrix} + b_1 P_j(n) \\ u_2 &= \frac{f_{n+1}}{k};\quad \dot{u}_1 = \frac{f_{n+1}}{c};\quad u_1 = (u_j - u_i) - u_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(23)$$

次に、Maxwell モデルの理論式を全体釣合式に組み込む手法について述べる。ここでは振動方程式の全体釣合式は、混合法の一種である OS(Operator Splitting)＋Newmark-β **法**を用いる。反復法である OS+Newmark-β 法に関する非線形振動方程式は次式で表される。OS 法の詳細は、第 75 話を参照されたい。係数等についても同様である。

$$\mathbf{M\ddot{y}} + \mathbf{C\dot{y}} + \mathbf{K(y)} = -\mathbf{MI\ddot{u}_g} + \mathbf{P}_S \quad \cdots\cdots(24)$$

左辺第 1 項は慣性力、第 2 項は減衰項、第 3 項は幾何学的及び材料非線形性を有する構造物の内力ベクトルである。ベクトル $\mathbf{\ddot{y}, \dot{y}, y}$ は、加速度、速度、変位を各々表す。Maxwell モデルによる釣合式を、節点における力の釣合より、骨組全体の釣合式(24)に組み込むことになる。最初に、OS 法を適用するために、式(24)中の内力ベクトルの非線形部分と制振ダンパーの非線形項を右辺に移項し、左辺には線形項のみ残して、振動方程式を変更する。さらに、右辺の非線形内力項を増分変位が小さいとして、以下のように書き換える。

$$\mathbf{K(y)} = \mathbf{K(\bar{y})} + \mathbf{K}_T\mathbf{(\bar{y})}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{Q(\bar{y})} + \mathbf{K}_T\mathbf{(\bar{y})}\Delta\mathbf{y} \quad \cdots\cdots(25)$$

ここで、$\mathbf{\bar{y}}$ は増分時間前の変位、$\Delta\mathbf{y}$ は増分変位である。また、$\mathbf{Q(\bar{y})}$ は部材応力から求めた節点力ベクトルを、$\mathbf{K}_T\mathbf{(\bar{y})}$ は増分前の接線剛性を各々示す。右辺の非線形内力項を節点力ベクトルで表すことから、増分前までの不釣合い力が増分後の右辺項で評価され、方程式を解いた後、増分前の誤差が打ち消され、誤差の増大を抑制している。上式を用いると、振動方程式は下式のように変更され、反復解法の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M\ddot{y}} + \mathbf{\bar{C}\dot{y}} + \mathbf{Ky} &= -\mathbf{MI\ddot{u}}_g \\ &+ \mathbf{P}_S - \mathbf{Q(\bar{y})} - \mathbf{K}_T\mathbf{(\bar{y})}\Delta\mathbf{y} + \mathbf{Ky} - \mathbf{f}_d \end{aligned} \quad \cdots\cdots(26)$$

ここで、減衰行列 $\mathbf{\bar{C}}$ は $\mathbf{\bar{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{C_0}$ であり、右辺第 1 項はレーリー減衰と Maxwell モデル以外の減衰の和、第 2 項が全ての Maxwell モデルについて重ね合わせた減衰行列である。上式で、$\mathbf{F}_d\mathbf{(\dot{y})}$ は制振ダンパーの節点力を節点での力の釣合より重ね合わせたベクトルであり、式(23)を参考に以下のように表される

$$\mathbf{F}_d\mathbf{(\dot{y})} = \sum\left\{\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ -a_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{y}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{di} \\ f_{dj} \end{Bmatrix}\right\} = \mathbf{C_0\dot{y}} + \mathbf{f}_d;\quad \mathbf{f}_d = \sum_{j=1}\begin{Bmatrix} -a_1\dot{u}_{jn} - b_1 f_{jn} \\ a_1\dot{u}_{jn} + b_1 f_{jn} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(27)$$