第１１６話　制振装置の Maxwell モデル No.1

今回は制振装置のモデル化で使用される Maxwell モデルについてお話しする。減衰機構として、材料の塑性化による履歴減衰及び部材に組み込まれた制振装置などがある。制振装置を力学モデルに置換する場合、Voigt モデルや Maxwell モデルが良く用いられる。減衰要素として、色々なタイプがあり、粘性減衰、粘弾性減衰、クーロン摩擦減衰、速度 2 乗型減衰、ヒステリシス減衰などがある。各々独自の特性を有するため、その特性を十分に理解すると共に、実際に使用する制振装置がどのタイプに適合するかを調査する必要がある。ここでは、Maxwell モデルをどのように構築、数値計算するかについてお話しする。

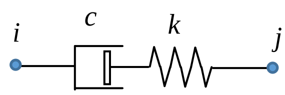

図１ Maxwell モデル

部材内の変位と応力は、原点側を i 端、他方を j 端とすると、部材両端の変位 (u_i, u_j) と外力 (P_i, P_j) を用いて、次式で表される。

$$u = u_j - u_i; \quad f = -P_i; \quad f = P_j \qquad \cdots\cdots(1)$$

u 及び f は要素内の変位と応力を表す。Maxwell モデルでは、要素が直列に結合しているため次式が成立する。記号 $\dot{u}$ などは時間微分を表す。

$$f = c\dot{u}_1; \quad f = ku_2; \quad u = u_1 + u_2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで、u_1 はダッシュポットの変位を、u_2 はバネ要素の変位を表す。ただし、ダッシュポットの減衰定数 c はバイリニア型の非線形とする。

Maxwell モデルの基本式を少し変形して中央の節点変位を消去し、両端の変位と速度で、力学モデルを表す。最初に、式(2)の第 3 式の両辺を時間微分する。

$$\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

次に、式(2)から速度を求める。ただし、剛性 k は線形とする。

$$\dot{u}_1 = \frac{f}{c} \qquad \cdots\cdots(4) \qquad\qquad \dot{u}_2 = \frac{\dot{f}}{k} \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで、$\dot{f}$ は応力の時間微分を表す。式(4)と(5)を式(3)に代入すると、Maxwell モデルの基本式が得られる。

$$\dot{u} = \frac{f}{c} + \frac{\dot{f}}{k}; \rightarrow \quad k\dot{u} = \frac{1}{\tau} f + \dot{f} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここで、$\tau = c / k$ は緩和時間と呼ばれ、時間の単位を持つ。この Maxwell 要素にステップ変位を入力した場合、内部応力が時間と共に小さくなる。この力の緩和曲線は、$f = ke^{-t/\tau}$ で与えられ、緩和時間 τ は内部応力あるいは外力がステップ入力後に $1/e$ となる時間を表す。Maxwell 要素において、定常応答の変位と内部応力を次式で仮定し、

$$u = Xe^{i\omega t}; \quad f = f_0 e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots(7)$$

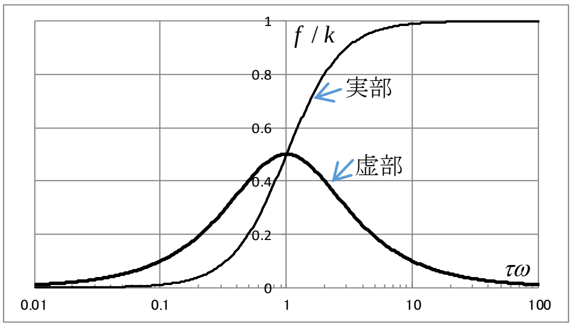

図 2 Maxwell 要素の振動数依存性

式(6)と(7)を考慮して式(5)の右式に代入すると、

$$(i\omega kX - f_0(\frac{1}{\tau}+i\omega))e^{i\omega t} = 0 \rightarrow \quad i\omega kX - f_0(\frac{1}{\tau}+i\omega) = 0 \quad \cdots\cdot(8)$$

となり、Maxwell 要素の等価剛性が次のように得られる。

$$f_0 = \frac{i\tau\omega}{(1+i\tau\omega)}kX = k_E X; \quad k_E = \frac{\tau^2\omega^2 + i\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}k \qquad \cdots\cdots(9)$$

等価剛性 k_E は上式のように複素バネとして表現され、その実部と虚部が図 2 に示される。同図は、複素バネの実部と虚部を $\tau\omega$ の関数として表している。実部は $\tau\omega$ の増加と共に単調に増加しており、極限ではバネ要素の係数 k となる。一方、虚部は $\tau\omega = 1$ のときに最大値 $k/2$ となる。

複素バネによって、Maxwell モデルでは力と変位の間に位相差が生じ、エネルギー吸収を伴う。調和振動時の 1 周期当たりにおけるエネルギー吸収量 ΔW は、

$$\Delta W = \pi\,\mathrm{Im}(k_E)X^2 = \pi\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}kX^2 \qquad \cdots\cdots(10)$$

で与えられる。ここで、 $\mathrm{Im}(k_E)$ は等価剛性 k_E の虚部を表す。上式で $\tau\omega = 1$ の時、図 2 より $\Delta W = \pi kX^2/2$ となり、エネルギー吸収量が最も大きな値となることが分かる。これは、Maxwell 要素のバネとダッシュポットが一定値である場合、即ち線形であるという条件の特性である。つまり、パッシブ制御のエネルギー吸収の限界を表しているともいえる。

次に、Maxwell モデルの数値解析手法について考える。式(6)を少し変更すると、部材内部の応力 f 、及びその時間微分 $\dot{f}$ は次式となる。

$$f = c\dot{u} - \frac{c}{k}\dot{f}; \quad \dot{f} + \frac{k}{c}f = k\dot{u} \qquad \cdots\cdots(11)$$

さらに内部の変位と応力は、要素両端の変位と力の釣合より式(1)で表されており、これを式(11)に適用すると、

$$\dot{P}_j + \frac{k}{c}P_j = k(\dot{x}_j - \dot{x}_i) \qquad \cdots\cdots(12)$$

となり、Maxwell モデルの数値解析用の基礎式が得られる。**Maxwell モデルでは応力の微分を含むため、このまま振動方程式の中に組み込めない。**そこで、要素の応力を次のようにテーラー展開し、応力変化を線形として振動方程式を求める。ただし、 f_n の 2 回時間微分を次の差分 $\ddot{f}_n = \left(\dot{f}_{n+1} - \dot{f}_n\right)/\Delta t$ で仮定する。

$$f_{n+1} = f_n + \dot{f}_n\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{f}_n\Delta t^2 \rightarrow \quad f_{n+1} = f_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{f}_{n+1} + \dot{f}_n) \quad \cdots\cdots(13)$$

Maxwell モデルを含む構造物の数値解析では、その安定性と精度に特段の注意が必要である。要素の内部応力を時間間隔 Δt 秒で、2 次の項までを採用し近似している。そのため、Maxwell モデルの履歴が十分精度良く求められる Δt を採用する必要がある。