第１１３話　TMD の原理 No.1

今回は、同調型機械式制振装置(TMD :Tuned Mass Damper)の制振原理と、構造物共振域の応答値をどのように低減させているかについてお話しする。TMD は、構造物の振動を小さな 1 自由度振動系を付加することで制御する。つまり、付加振動系を共振状態にさせ、ダンパーでエネルギーをより多く消費させる。この種の制御法は、吊り橋や斜張橋、高層建築物などで、風に対する振動対策として実績がある。

TMD の性能は、最適値付近で同調比やダンパーなどの設計パラメータに敏感となり、製作上の制約や小さな設計誤差などで大きく低下する。これをロバスト性の低下という。対策として付加振動系を複数設置して、対象モードの振動数附近に TMD を分布させる方法(MTDM; Multiple Tuned Mass Dampers)が提案されており、これについてもお話しする。

ここでは、まず 2 自由度系振動モデルの特性を分析する。実際の多自由度系では、対象とする振動モードを取り出し、付加振動系と共に制御するための対象モードをこの 2 自由度系で表す。ここでは、主振動系(対象モード)と副振動系(TMD)の 2 自由度系として応答を分析し、その特性を学ぶ。ここでは、副振動系にばねと並列にダッシュポットが設置されている 2 自由度系について考える。ただし、主振動系には減衰はないものとする。このダッシュポットの減衰係数を c とすると、周期外乱を受ける 2 自由度系の振動方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(1)$$

上式の解から求めた主振動の振幅を、次の無次元パラメータを導入して変換する。

$$\left.\begin{aligned} &\mu=\frac{m_2}{m_1};\quad \omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}};\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}};\quad f=\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ &g=\frac{p}{\omega_1};\quad a_{st}=\frac{P_0}{k_1};\quad c_c=2m_2\omega_2;\quad h=\frac{c}{c_c} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

無次元パラメータによる主振動の振幅は

$$\frac{|a_1|}{\dfrac{P_0}{k_1}}=\frac{|a_1|}{a_{st}}=\sqrt{\frac{(f^2-g^2)^2+(2hfg)^2}{\left\{(1-g^2)(f^2-g^2)-\mu f^2 g^2\right\}^2+(2hfg)^2(1-g^2-\mu g^2)^2}} \quad \cdots(3)$$

となり、主振動系の振幅比 $|a_1/a_{st}|$ を、質量比 μ、減衰定数 h、主と副の振動系の同調比 f、及び外乱振動数と主振動系の振動数の比 g、これら 4 つのパラメータで表した式である。

a_{st}：主振動系の静的変位
ω_1：主振動系の固有角振動数
ω_2：副振動系の固有角振動数
h：減衰定数
μ：質量比
f：同調比
c_c：臨界減衰
g：外乱振動数と主振動系の振動数の比

図 1 には式(3)で表された主振動系の振幅比が、外乱振動数と主振動系の振動数の比 g に対して示されている。ここでは、同調比 $f=1$、質量比 $\mu=0.01$ として、数本の減衰定数 h に対し、振幅応答値が示されている。応答値の特徴として、次の 2 点が挙げられる。ひとつは、減衰が零と無限大で最大振幅が無限大となっており、外乱振動数はこの系の 2 つの固有振動数に一致する。また、減衰が無限大の場合は、副振動系が主振動系に結合した状態に対応しており、無限大を示す振動数は、主振動系の質量に副振動系の質量を加えた系の固有振動数となっている。

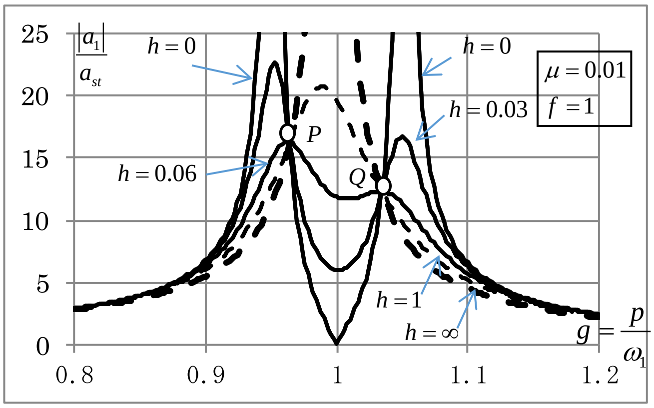

図 1 各種減衰がある場合の応答振幅曲線

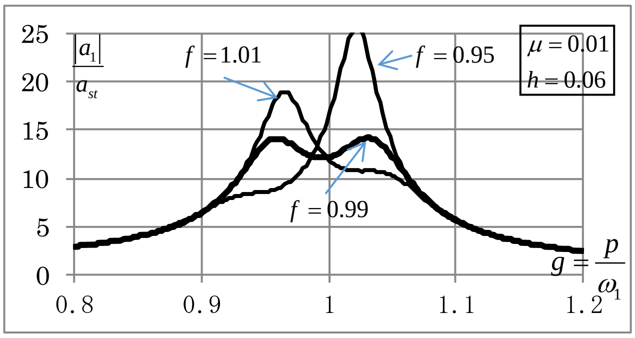

図 2 同調比の影響による応答振幅曲線

他のひとつは、いずれの減衰に対しても、主振動系の応答振幅曲線が図中の P と Q の 2 つの点を通過していることである。これは偶然ではなく、その 2 点では、減衰に関係なく応答振幅が決定することを意味している。

図 2 は同調比を少し変化させて応答振幅の変化を調べた図である。ここでは質量比は $\mu=0.01$ とし、減衰定数は $h=0.06$ としている。同調比によって応答振幅の極大値が変化しており、同調比を適切に選択することで、共振応答の抑制が可能であることを示している。

次に、P・Q 点での g の値を求める。この 2 点では、h に無関係に a_1/a_{st} が決定されることを利用して以下のように g を求める。

$$g_{1,2}^2=\frac{1}{2+\mu}\left\{1+(1+\mu)f^2\pm\sqrt{(1+f^2+\mu f^2)^2-2f^2(2+\mu)}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

これまで、2 自由度振動系の応答振幅を求め、その特性についてお話しした。後はその特性を利用して、副振動系(TMD)のパラメータを最適に設計する方法を考える。副振動系の減衰が零の場合と無限大の場合、応答が無限大となる共振振幅となった。このことから、中間部に大きく共振しない最適な減衰の値が存在することが予想される。つまり、その値では、応答振幅のピークが小さくなり、低い位置で平滑となる。次回では最適値を求める具体的方法として、Den Hartong による**定点法**について解説する。同法では、P 点と Q 点の振幅応答値が等しく、また、その値が極大になることを最適条件とし、副振動系のパラメータを決定する。さらに、MTDM についても概略お話しする。