第１１話　幾何学的非線形と材料非線形

前回は、数値計算に関する話題であったが、今回は構造力学についての話である。テーマは構造力学における非線形問題であり、この言葉は構造物の耐力や設計などで多く見かけるのでなじみ深い。しかし、非線形とは何かと尋ねられると適切に応え難い。そこで、今回は構造解析の非線形問題に関する基本的な考えについてお話しする。

以前、弾性論における基本中の基本は、1）応力とひずみの関係、2）変位とひずみの関係であるといった。この両者が線形関係で表される場合、線形問題といわれる。一方、2 つの関係が非線形関係にあると非線形問題といい、特に、前者を**材料非線形問題**、後者を**幾何学的非線形問題**という。やはり、一般論では理解し難いので、ベルヌーイ・オイラー梁で考えてみよう。上記 2 つの線形関係は次式で表され、1）を材料関係、 2）を幾何学的な関係ともいう。

$$1)\ \sigma_x = E_x\varepsilon_x;\quad 2)\ \varepsilon_x = \varepsilon_L + \kappa;\quad (\varepsilon_L = \frac{du}{dx};\quad \kappa = -y\frac{d^2w}{dx^2} - z\frac{d^2v}{dx^2})$$

まず、 1）の応力とひずみの関係で、線形ではヤング係数 E_x は定数であり、材料によって異なる値を採る。鉄骨構造では $E_x = 20500kN/cm^2$ である。一方、非線形関係になると、この関係は骨格曲線で表される。鉄骨では比較的力学で扱い易い形をしており、特にコンピュータで扱うために図 1 の点線のように 2 つの直線で表すことが多い。そのため、この種の非線形性はバイリニア型と呼ばれる。除荷が起きるとそれまでの履歴を逆進せず、点線の方向に進む。応力が零の位置では、残留ひずみが発生し、さらに除荷が進むと履歴はループを描く。**材料非線形性は、先の骨格曲線と履歴ループ則によって決定される**。材料非線形性に関する特性やその他の材料については、改めてお話ししよう。

大変形を考慮するためには、変位とひずみの関係を非線形として扱わなければならない。連続体の変形は、*Euler* 表示あるいは *Lagrange* 表示で表すことができ、前者は変形後の点を、後者は変形前の点を座標の基点に考える。ここでは、ベルヌーイ・オイラー梁に対し *Lagrange* 表示を用い、法線保持の仮定を適用すると、次の 2 次の非線形項を考慮した非線形軸ひずみが得られる。ただし、**曲げによるひずみは線形とし、大きな曲率の変化は考慮しない**。そのため、部材が大きく曲げられる場合は、曲率の非線形性を考慮する必要がある。建築で扱う梁・柱ではそれほど大きく曲げられることはないので、線形として扱う場合が多い。

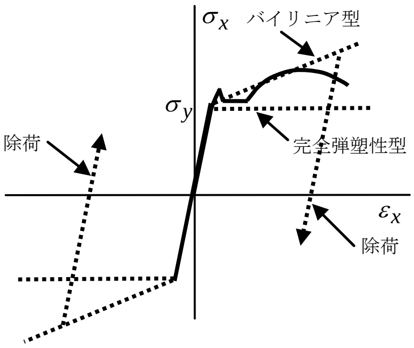


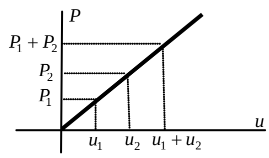
図 1 応力とひずみの関係

鋼の E : $20500kN/cm^2$
コンクリート：およそ鋼の $1/10$
木造 :$700 \sim 1000kN/cm^2$

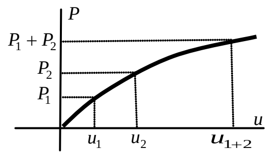
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} - y\frac{d^2v}{dx^2} - z\frac{d^2w}{dx^2}$$
$$= \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa$$

ここで、ε_L は線形ひずみ、ε_N は非線形ひずみ、κ は曲げによる線形ひずみである。非線形ひずみ ε_N を加えることで、座屈や不安定現象など、多くの特異な現象が解明できる。

線形問題の特徴は**重ね合わせの原理**の成立である。非線形ではこの原理が成立しない。例えば、図 2(a)の長期荷重と短期荷重である地震、風、雪荷重などを個別に応力解析し、その後、短期と長期荷重による応力を加え合わせて断面算定を行う。これが可能なのは、全て線形解析であり、重ね合わせの原理が成立するからである。非線形解析では図 2(b)のように荷重 P_1 と荷重 P_2 の各々の変位の和 $u_1 + u_2$ と、両荷重の和 $P_1 + P_2$ に対する変位 u_{1+2} が異なるため重ね合わせの原理は成立しない。



(a) 線形解析



(b) 非線形解析

図 2 重ね合わせの原理

次に、幾何学的非線形性とは如何なるものか考えてみよう。両端ピン支持、中央集中荷重を受ける梁で、図 3 にその変形状態が示される。中央のたわみが大きくなると、点線のように三角形を構成し、部材は軸方向変位が生じて伸びることになる。図 4 の片持ち梁では、先端集中荷重状態の変位では部材は回転し、先端は鉛直方向にたわむと共に水平変位が生じる。しかしながら、線形解析では両例題とも鉛直方向変位は小さく、軸方向変位は生じないとする。このように実変位と線形解析で求めた変位では、たわみが大きくなるに従ってずれが生じる。そのずれを補正するために、上記の 2 次の非線形項を考慮した変位―ひずみ関係を用いる。さらに、変位が大きくなると上記のひずみでは適切でなく、異なった方法、つまり、さらに高次のひずみを用いることになるが、建築構造物ではそのような解析を行うことはほとんどない。

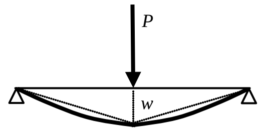


図 3 中央集中荷重両端ピン支持梁

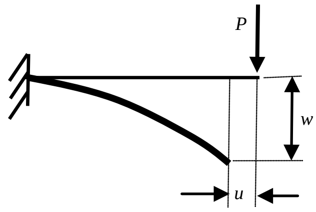
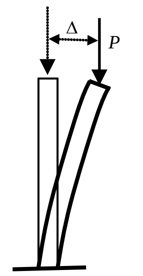
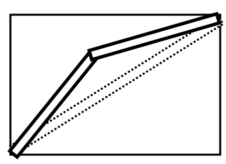


図 4 先端集中荷重片持ち梁

建築の構造解析では、幾何学的非線形性は特殊構造物以外考慮されていない。考慮される例として、変形が大きく生じる立体トラスドームなどスペースフレームの応力解析や、高層のビルや免震装置に生じる $P-\Delta$ 効果などがある。また、鉄骨構造内のブレースにおける座屈後挙動でも幾何学的非線形性を考慮した手法が用いられる。ただし、一般的に、幾何学的非線形を考慮した大変形問題では数値計算の安定性が悪く、まれに解が発散することもある。そのため、この種の問題を扱うには経験が必要となる。そこで $P-\Delta$ 効果や座屈後挙動では、上記の幾何学的非線形性を考慮した手法ではなく、構成式を変形することで付加荷重や材料非線形問題に置き換える方法が良く用いられる。上記の方法で安定性が担保され、誰もが使用できるようになる。



(a) 高層骨組の $P-\Delta$ 効果



(b) 鉄骨ブレースの座屈後挙動

図 5 幾何学的非線形解析