第１０８話　簡易型地盤応答解析 No.2

今回も、第 2 段階の地震波伝播過程についてお話しする。式(11) で表された方程式では、$A_k e^{ip_k z_k}$ はゼロでないことより、次式が得られる。

$$p_k^2 = \frac{\rho_k \omega^2}{G_k}\left(1-2h_k i\right) \to p_k = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho_k}{G_k}\left(1-2h_k i\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

ここで、$h \ll 1$ より近似的に $1-2h_k i \simeq (1+2h_k i)^{-1}$ となり、$G_k^* = G_k\left(1+2h_k i\right)$ と複素剛性から定義できる波動伝播定数を $p_k^* = \omega\sqrt{\rho_k / G_k^*}$ とすると、モード形状関数 $u_k\left(z_k\right)$ は 2 つの積分定数 A_k と B_k を用いると次式となる。

$$u_k\left(z_k\right) = A_k e^{ip_k^* z_k} + B_k e^{-ip_k^* z_k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

従って、波動方程式の解は、

$$\xi_k\left(z_k, t\right) = \left(A_k e^{ip_k^* z_k} + B_k e^{-ip_k^* z_k}\right) e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

として、また、各層のせん断ひずみ $\gamma_k\left(z_k, t\right)$ とせん断応力は

$$\left.\begin{aligned} \gamma_k\left(z_k, t\right) &= ip_k^*\left(A_k e^{ip_k^* z_k} - B_k e^{-ip_k^* z_k}\right) e^{i\omega t} \\ \tau_k\left(z_k, t\right) &= G_k^* \gamma = ip_k^*\left(A_k e^{ip_k^* z_k} - B_k e^{-ip_k^* z_k}\right) e^{i\omega t} \cdot G_k^* \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

せん断ひずみとせん断応力の関係は、複素剛性を用いると次式で表される。

$\tau = G^* \gamma = G(1+2hi)\gamma$

として、ここに A_k と B_k は各々ある層 k における波動の上昇波振幅成分と下降波振幅成分を表している。以上の波動方程式の解は全層 1 〜 N に対しても成立しているので、各境界面について境界条件を付加することにより積分定数 A_k と B_k $\left(1 \le k \le N\right)$ を定めることができる。

境界条件として、地表面 $z_1 = 0$ の自由境界では、せん断応力は $\tau_1\left(z_1 = 0, t\right) = 0$ であることから、次式が得られる。

$$\tau_1 = G_1^* \gamma_k\left(0, t\right) = ip_1^*\left(A_1 - B_1\right) e^{i\omega t}; \quad A_1 = B_1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

さらに、相重なる 2 層間 $z_k = H_k$ と $z_{k+1} = 0$ において、水平変位とせん断応力は等しい。従って、次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} \xi_k\left(z_k = H_k, t\right) &= \xi_{k+1}\left(z_{k+1} = 0, t\right) \\ \tau_k\left(z_k = H_k, t\right) &= \tau_{k+1}\left(z_{k+1} = 0, t\right) \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, \cdots, N-1 \qquad \cdots\cdots(17)$$

上式より、漸化式が次のように導かれる。

$$\left.\begin{aligned} ip_k^*\left(A_k e^{ip_k^* H_k} + B_k e^{-ip_k^* H_k}\right) e^{i\omega t} &= ip_{k+1}^*\left(A_{k+1} + B_{k+1}\right) e^{i\omega t} \\ ip_k^* G_k^{\,*}\left(A_k e^{ip_k^* H_k} - B_k e^{-ip_k^* H_k}\right) e^{i\omega t} &= ip_{k+1}^* G_{k+1}^{\,*}\left(A_{k+1} - B_{k+1}\right) e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(18)$$

さらに、整理すると

$$\left.\begin{aligned} &(A_k e^{ip_k^* H_k} + B_k e^{-ip_k^* H_k}) = \left(A_{k+1} + B_{k+1}\right) \\ &\frac{p_k^* G_k^*}{p_{k+1}^* G_{k+1}^*}(A_k e^{ip_k^* H_k} - B_k e^{-ip_k^* H_k}) = \left(A_{k+1} - B_{k+1}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(19)$$

となり、最終的に上式を足して 1/2 し、また、引いて 1/2 すると下式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}\left\{A_k\left(1+R_k^*\right)e^{ip_k^*H_k} + B_k\left(1-R_k^*\right)e^{-ip_k^*H_k}\right\} \\ B_{k+1} &= \frac{1}{2}\left\{A_k\left(1-R_k^*\right)e^{ip_k^*H_k} + B_k\left(1+R_k^*\right)e^{-ip_k^*H_k}\right\} \end{aligned}\right\} \quad k=1,2,\cdots,N-1 \quad \cdots\cdots(20)$$

上式を解くことで、全層についての積分定数が得られたことになる。上式において R_k^* は波動インピーダンス比であり、次式で定義される。

$$R_k^* = \frac{G_k^*\rho_k^*}{G_{k+1}^*\rho_{k+1}^*} \quad k=1,2,\cdots,N-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

各層の上昇波、下降波の振幅 A_k と B_k はその割合が分かれば良いので通常 $A_1 = B_1 = 1$ として、順次漸化式を解いて全層の積分定数を求めることになる。

各層の波動方程式の解が求めることができれば、ある層 n における上端面の変位は $\xi_n\left(0,t\right) = \left(A_n + B_n\right)e^{i\omega t}$ $\xi_n\left(z_n = 0,t\right)$ で表され、同様に、第 m 層変位も $\xi_m\left(0,t\right) = \left(A_m + B_m\right)e^{i\omega t}$ $\xi_m\left(z_m = 0,t\right)$ で表される。第 m 層上端面の変位を元に、第 n 層の変位へと変換する表層地盤の周波数応答関数（伝達関数）はこれらの比として定義することができ、下式がその第 m 層から第 n 層への周波数応答関数である。

$$Z_{\frac{n}{m}}\left(\omega\right) = \frac{\xi_n}{\xi_m} = \frac{A_n + B_n}{A_m + B_m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

また、速度 $\dot{\xi}\left(z,t\right)$ と加速度 $\ddot{\xi}\left(z,t\right)$ は、

$$\dot{\xi}\left(z,t\right) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = i\omega\xi\left(z,t\right); \quad \ddot{\xi}\left(z,t\right) = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2\xi\left(z,t\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となり、ある層 m の上端面から第 n 層へ、速度と加速度に対する伝達関数も、次式のように変位と同一式で表すことができる。

$$Z_{\frac{n}{m}}\left(\omega\right) = \frac{\xi_n}{\xi_m} = \frac{\dot{\xi}_n}{\dot{\xi}_m} = \frac{\ddot{\xi}_n}{\ddot{\xi}_m} = \frac{A_n + B_n}{A_m + B_m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

また、第 n 層中点位置におけるせん断ひずみは

$$\gamma_n\left(z_n = \frac{H_n}{2}, t\right) = ip_n^*\left(A_n e^{ip_n^*\frac{H_n}{2}} - B_n e^{-ip_n^*\frac{H_n}{2}}\right)e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

となり、第 m 層の加速度調和振動数成分から、上のせん断ひずみへの伝達関数は下式となる。

$$\tilde{Z}_{\frac{n}{m}}\left(\omega\right) = \frac{\gamma_n}{\ddot{\xi}_m} = -\frac{ip_n^*\left(A_n e^{ip_n^*H_n/2} - B_n e^{-ip_n^*H_n/2}\right)}{\omega^2\left(A_m + B_m\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

以上で、波動方程式の解、及び、ある層 m の上端面から第 n 層へ伝達関数が求められた。あとは、工学的基盤面及び地表面における境界条件を与えることで、全ての伝達関数が決定することになる。