第１０７話　簡易型地盤応答解析 No.1

今回は、第 2 段階の地震波伝播過程に関する各種の仮定と共に、重複反射理論についてお話しする。数値解析手法は通常の地震応答解析とは異なり、フーリエ変換を用いる。これは、地盤の減衰係数が振動数に依存するため、通常の数値積分では求められないことによる。さらに、土のせん断弾性係数や減衰定数はひずみの大きさに依存するため、非線形挙動を示す。線形の応答解析手法では対応できず、解析手法を拡張する必要がある。そのため SHAKE では等価線形化法を用いる。

今回は式が多く、しかも余りなじみのない波動方程式が出ている。ここでは、概略を理解すれば良い。詳細を知りたい場合は、テキスト「SPACE で学ぶ構造力学　不規則振動と人工地震波」を参照されたい。

地震動を複数の調和振動数成分の重ね合わせとして考え、特にせん断波の水平方向成分の波動伝播を 1 次元問題として扱い、境界で波動が多重反射するものとする。多重反射と 1 次元の半無限水平成層地盤モデルを用いることで、地下逸散減衰を解析手法に取り込んでいる。

土の減衰機構は振動数に依存しない履歴減衰に加え、地盤中に波動が伝播する際に起こる散乱減衰も取り扱うために、図 1 のように Maxwell モデルに直列に履歴減衰を表すダッシュポットを取り付けたモデルとする。このモデルの応力・ひずみ関係を定式化する際、せん断弾性係数は振動数依存性がないものとする。

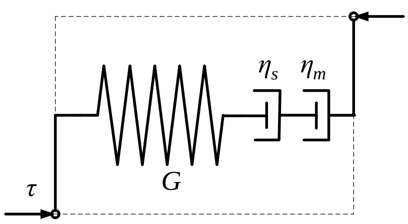

図 1 土の減衰モデル

τ	：せん断応力(ｋN/m²)
G	：せん断弾性係数(ｋN/m²)
η_s	：粘性係数(散乱減衰)(ｋN･sec/m²)
η_m	：粘性係数(履歴減衰)(ｋN･sec/m²)

この機構は全要素について同一のせん断応力 τ を受けるので、せん断ひずみ速度 $d\gamma / dt$ に関する平衡方程式は次式となる。

$$\frac{d\tau}{dt} + G\left(\frac{1}{\eta_s} + \frac{1}{\eta_m}\right)\tau = G\frac{d\gamma}{dt} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで地盤の散乱減衰定数 α と材料減衰定数 β を次のように定義する。角振動数を $\omega(rad / \sec)$ として

$$\frac{G}{\eta_s} \equiv 2\alpha = const; \quad (1/\sec) \qquad \frac{G}{\eta_m \omega} \equiv 2\beta = const \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

さらに、この α と β を用いて減衰機構の減衰定数 h は

$$h = h(\omega) = \frac{\alpha}{\omega} + \beta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

として角振動数の関数として表現できる。上記の減衰定数 h を用いると、応力・ひずみ関係式(1)は次のように書き改められる。

$$\frac{d\tau}{dt} + 2h\omega\tau = G\frac{d\gamma}{dt} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

一次元重複反射理論では本来不均質で凹凸がある表層地盤を、純粋な水平方向に無限に広がる水平成層地盤とし、その下にある工学的基盤を鉛直方向に無限大の深さを持つ半無限弾性体として仮定する。従って、ここでの波動による地盤の変位場はせん断変形のみに限定される。

一次元重複反射理論では、地盤マクロモデルを地表面から順に番号付けを行い、工学的基盤面を第 N 層として有限個の成層地盤へと離散化する。各層ごとに層間深度 H_k 、せん断弾性係数 G_k 、単位体積密度 ρ_k 、減衰定数 h_k 、散乱減衰定数 α_k 、及び材料減衰定数 β_k を地盤諸量として定義し、さらに局所座標 (x_k, z_k) を定めるものとする。

地盤マクロモデルにおいて、任意層 k の局所座標系における深さ z にある断面積 A 、微小厚さ dz を有する要素について、水平方向要素変位を $\xi(z,t)$ とするとき、運動方程式は、慣性力とせん断力の釣合から次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau(z_k,t)}{\partial z_k} - \rho \frac{\partial^2 \xi_k(z_k,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

上式に、前出の直列 Maxwell 型減衰機構の応力・ひずみ関係を用いると、せん断ひずみの定義

$$\gamma(z,t) = \frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

より、応力・ひずみ関係式(4)を一度 z_k で偏微分した後、運動方程式(5)は、式(4)の微分後の式と式(6)を用いると次のように得られる。

$$\frac{\partial^3 \xi_k(z_k,t)}{\partial t^3} + 2h_k\omega \frac{\partial^2 \xi_k(z_k,t)}{\partial t^2} - \frac{G_k}{\rho_k}\frac{\partial^3 \xi_k(z_k,t)}{\partial t \partial z_k^2} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

上式が、任意層 k における均質媒体中の地盤の挙動を支配する波動方程式である。

今、このような水平地盤が一定の角振動数 ω で調和振動しているとき、波動方程式の解 $\xi_k(z_k,t)$ は、次式のようにモード形状関数 $u_k(z_k)$ と調和振動数成分 $e^{i\omega t}$ との積で表される。

$$\xi_k(z_k,t) = u_k(z_k)e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

上式を先の波動方程式(7)に代入し整理すると、次式が得られる。

$$-i\omega^3 u_k e^{i\omega t} - 2h_k\omega^3 u_k e^{i\omega t} - i\omega \frac{G_k}{\rho_k}\frac{d^2u_k}{dz_k^2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$-i\omega e^{i\omega t}\left(\frac{G_k}{\rho_k}\frac{d^2u_k}{dz_k^2} + \omega^2(1-2h_k i)u_k\right) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

さらに、 $e^{i\omega t}$ はゼロでないので、次のように複素剛性を有する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2u_k}{dz_k^2} + \frac{\rho_k\omega^2}{G_k}(1-2h_k i)u_k = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

上の方程式の解を $u_k(z_k) = A_k e^{ip_k z_k}$ で仮定し、上式に代入すると次式が得られる。

$$-p_k^2(A_k e^{ip_k z_k}) + \frac{\rho_k\omega^2}{G_k}(1-2h_k i)(A_k e^{ip_k z_k}) = 0 \quad \rightarrow$$

$$(-p_k^2 + \frac{\rho_k\omega^2}{G_k}(1-2h_k i))A_k e^{ip_k z_k} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$