第１０５話　行列指数関数

今回は、行列指数関数である状態偏移行列についてお話しする。この行列は、定係数型の非同次線形微分方程式の特殊解を求める際に利用される。まず**状態遷移行列**(state transition matrix)を定義し、その性質を調べる。無限級数で表された次式を状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ として定義する。

今回は式ばかりで申し訳ない。この行列指数関数は非常に有用なので是非頑張って理解されたい。

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ただし、$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ であり、$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \cdots$ を意味する。また、状態遷移行列は指数部の正方行列と同じ大きさを持つ正方行列である。状態遷移行列の特性を以下にまとめる。

この方程式は、アクティブ制御で出現する。これについては後日お話しする。

$$\left.\begin{array}{l} 1: e^{\mathbf{A}t}\Big|_{t=0} = \mathbf{I}; \quad 2: \dfrac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \quad 3: \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}d\tau = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1} \\ 4: e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}; \quad 5: (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \end{array}\right\}\cdots(2)$$

定係数型の線形微分方程式の特殊解を、状態遷移行列を用いて求める。まず、アクティブ制御で用いる状態方程式と観測方程式を以下に示す。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \overline{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

最初に、上式で入力 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ の解を求める。線形微分方程式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ は一般に自由システムと呼ばれる。初期状態は $\mathbf{x}_0$ であるとする。ここで、上式の解を $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ と仮定し、両辺を微分する。微分は式(2)を考慮すると、$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}$ となる。また、時刻 $t = 0$ では、$\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ であることから、$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ は、$\mathbf{u}(t) = 0$ の場合の微分方程式の解であることが分かる。この結果を利用すると、時刻 τ における状態量が $\mathbf{x}(\tau)$ であるとき、時刻 $t(>\tau)$ における状態量 $\mathbf{x}(t)$ は次式で与えられる。

定係数型線形微分方程式の**同次解**

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{x}(\tau)$$

上式より、$e^{\mathbf{A}t}$ は t 秒経過後の状態量を決定する関数であることが分かる。

定係数型線形微分方程式の**特殊解**

次に $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ の特殊解を求める。同方程式の解として $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r}(t)$ を仮定する。この解の両辺を微分すると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r} + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{r}}$$

となり、上式と $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ を比較すると、$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ が成立する。この式の両辺に $e^{\mathbf{A}t}$ の逆行列 $e^{-\mathbf{A}t}$ を左より掛けると、$\dot{\mathbf{r}} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}$ が得られる。ここで、$t < 0$ に対して、$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ であるとすると、$\mathbf{r}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ が得られる。特殊解は、$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r}(t)$ と仮定したことから、次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

以上から、状態方程式の一般解は、$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ と上式の解の和として、

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

であり、任意時刻 t の状態量 $\mathbf{x}$ が初期値の応答（上式第 1 項）と入力応答（第 2 項）の和として与えられる。一方、観測量 $\bar{\mathbf{y}}$ は上式より次式となる。

左記のように、状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ によって、定係数型の非同次線形微分方程式の解が容易に求められることが分かる。

$$\bar{\mathbf{y}}=\mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0+\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ は、時間の関数として式(1)で定義されているが、その実態は良く分からない。そこで、この行列 $e^{\mathbf{A}t}$ を具体的に求めてみよう。まず、式(3)左で示す状態方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

となる。ここで、$\mathbf{x}(0)$ は初期値であり、また、$\mathbf{X}(s),\mathbf{U}(s)$ は各々、$\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)$ のラプラス変換後の関数を表す。上式を $\mathbf{X}(s)$ について解くと、

$$\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

さらに、上式をラプラス逆変換すると、応答 $\mathbf{x}(t)$ は次式で表される。

$$\mathbf{x}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)]+\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)]$$

一方、状態方程式の一般解は、式(4)で与えられており、初期値を任意時刻ではなく、$\mathbf{x}_0\to\mathbf{x}(0)$ とすると下式となる。

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

2 つの解の表現で、右辺第 1 項は初期値に、また第 2 項は入力に関連しており、互いに関連性はない。従って 2 式の各項は互いに等しく、次の等式が得られる。ただし $\mathbf{x}(0)$ が s の関数ではないことに注意されたい。

$$\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=e^{\mathbf{A}t};\quad \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)]=\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

上式左より $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ の逆行列を計算し、そのラプラス逆変換を行うことによって、状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ が具体的に求められることになる。

例題：次の行列に対する状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ を具体的に求めよ。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

この行列の逆行列は、

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

となる。次に、この行列の各要素について、ラプラス逆変換を行う。逆変換を行うために、各要素について部分分数展開を行う。各要素の部分分数展開をまとめると次式となり、上式をラプラス逆変換することで、$e^{\mathbf{A}t}$ が具体的に得られることになる。

ラプラス逆変換は、第 97 話の例題を参照するか、テキストの変換表を参照されたい。

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}\to\quad e^{\mathbf{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$