第１０１話　白色雑音とデルタ関数

　今回は、白色雑音と超関数の一つであるデルタ関数についてお話しする。太陽光が可視域全てで、ほぼ同じ強さの色成分を含んでいるのと同様に、周波数領域の各成分を同じ割合に混合している不規則波を白色雑音と呼んでいる。まず、この白色雑音の相関とスペクトルについて概観し、そこで出現するデルタ関数についてその特徴をお話しする。

ウィナー・ヒンチンの定理とは、定常確率過程のパワースペクトル密度が、対応する自己相関関数のフーリエ変換であること示しており、ヒンチン・コロモゴロフの定理ともいう。この定理は、良く出現するので覚えておこう。

　白色雑音のスペクトル $S_n(\omega)$ は、角周波数 ω に無関係で一定値 S_0 であることから、$S_n(\omega)=S_0$ で表される。この式に、Winer-Khintchine の公式を形式的に適用し、白色雑音の自己相関関数を求める。再度、逆フーリエ変換を行い、以下のようスペクトルを求め直す。

$$R_n(\tau)=S_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega\rightarrow \quad S_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_n(\tau)e^{-i\omega t}dt \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ところが、上式左で示された周期関数のフーリエ変換は不定となり、自己相関関数は求められない。上記の方法では、白色雑音の自己相関関数は決定しないため、異なった手法を用いなければならない。

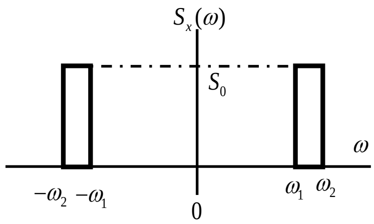

図 1 狭帯域不規則過程のスペクトル密度(2)

　最初に、図 1 の狭帯域不規則過程と呼ばれるスペクトル密度を有する波形の 2 乗平均値と自己相関関数を求めてみよう。2 乗平均値は、同図より、パワースペクトルの面積を計算することで、

$$E\left[x^2\right]=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega=4\pi S_0(\omega_2-\omega_1) \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

となり、自己相関関数とスペクトル密度関数は Winer-Khintchine の関係と、スペクトル $S_x(\omega)$ が偶関数であること、また $R_x(0)=E\left[x^2\right]$ から、自己相関関数は次のように計算される。

$$R_x(\tau)=4\pi\int_{\omega_1}^{\omega_2}S_0\cos(\omega\tau)d\omega=4\pi S_0\left[\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\right]_{\omega_1}^{\omega_2}=\frac{4\pi S_0}{\tau}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)$$

$$=\frac{2\pi S_0}{\tau}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\tau\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

得られた自己相関関数は、図 2 に示される。

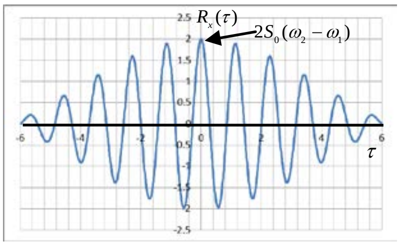

図 2 狭帯域矩形パルスの自己相関関数

　次に、図 3 に示す広帯域不規則過程の自己相関関数を求める。広帯域では式(3)で $\omega_1=0$ とすることで自己相関関数が求められる。

$$R_x(\tau)=\frac{2\pi S_0}{\tau}\cos\left(\frac{\omega_2}{2}\tau\right)\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\tau\right)=2\pi S_0\frac{\sin\omega_2\tau}{\tau} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

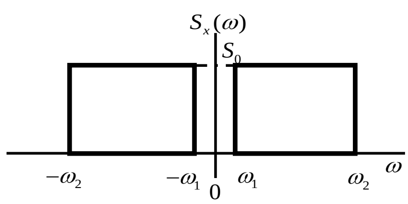

図 3 広帯域不規則過程のスペクトル密度

上式として得られた広帯域不規則過程の自己相関関数は、図 4 に示される。ω_2 が無限大に近づくに従って、$\tau=0$ のピークは大きくなり、他のピークは互いに接近し、ゼロに漸近する。最終的には、主たるピークは

無限大となり、他のピークは消失して図 5 に示す高さが無限大で幅がゼロとなるが、面積は有限な値を有する特殊な形状なる。この特異な挙動はディラックのデルタ関数 $\delta(\tau)$ (Dirac's delta function)で表すことになる。デルタ関数は超関数(distribution)と呼ばれる特別な関数のひとつである。デルタ関数 $\delta(t)$ は、$t=0$ で無限大、他はゼロの値を採る。また、この関数の積分は、次式で定義される。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

一般的には、デルタ関数は、$\delta(t-t_0)$ として使用され、この場合 $t=t_0$ で無限大、他はゼロとなる。この関数を用いると次式のように、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

連続な関数 $f(t)$ の任意の位置 $t=t_0$ の関数値を採りだすことができる。

このデルタ関数を用いると、スペクトル密度 S_0 を有する定常不規則過程における白色雑音の自己相関関数 $R_n(\tau)$ は、式(4)で ω_2 を無限大に近づけることによって、次式で表すことができる。

$$R_n(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau) \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

上式を用いてフーリエ変換し、再度、白色雑音のスペクトルを求めることにする。上式を式(1)の右に代入し、デルタ関数の性質である式(6)を利用すると

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi S_0\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{2\pi}{2\pi}S_0e^{-i\omega 0}=S_0;\quad (\because e^0=1) \qquad \cdots(8)$$

として、元の白色雑音のスペクトルが得られる。このように、白色雑音の自己相関関数は原点にデルタ関数を含んでおり、$\tau=0$ 以外の時間差に関しては無相関となっている。

デルタ関数は特異な性質を有する超関数であり、ここで、重要と思われる性質をまとめておく。デルタ関数を $(-\infty,t)$ の範囲で積分すると、ヘビサイドの階段関数(Heaviside's step function) $H(t-t_0)$ となり、逆に、階段関数を微分するとデルタ関数となる

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t-t_0)dt=H(t-t_0);\quad \frac{dH(t-t_0)}{dt}=\delta(t-t_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

任意関数が $t=t_0$ で n 回の連続した微分を有すると、デルタ関数の n 回の微分 $\delta^{(n)}$ と任意関数 $g(t)$ との積の積分は、次式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt=(-1)^n g^{(n)}(t_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

さらに、デルタ関数には以下の性質がある。覚えておこう。

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\delta(t-t_1)dt=\delta(t_0-t_1)\\&\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\delta(t)dt=\infty\\&\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\delta(t-\tau)dt=\delta(\tau)\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}x\delta(t)=0\\&\delta(-t)=\delta(t)\\&\delta(at)=|a|^{-1}\delta(t);\quad a\neq 0\\&\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(t-a)+\delta(t+a)}{2a};\quad a>0\end{aligned}\right\}\cdots(12)$$

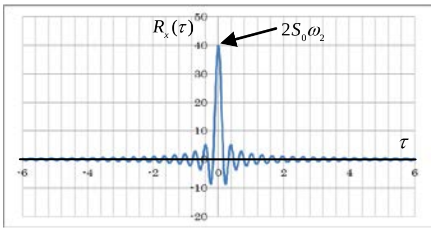

図 4 広帯域矩形パルスの自己相関関数

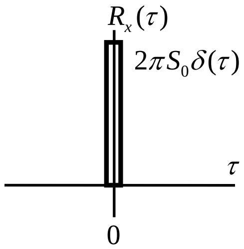

図 5 広帯域不規則過程のスペクトル密度