第１０話　連立方程式を解く

構造物の挙動は、主として偏微分方程式で表される。一般的には理論解は得られないし、ましてや地震動のような複雑な外乱では尚更である。そこで、各種の方法、例えば有限要素法や差分法、レーリーリッツ法などを用いて代数方程式に変換する。さらに、その代数方程式を解いて近似的な解を求めることになる。構造物の応力問題や動的問題などは、最終的に連立方程式となる。非線形問題であっても、連立方程式を繰り返し解くことで解が求められる。この種の問題は連立方程式を解くことに帰着される。連立方程式の解法は大きく 2 つに分類される。**消去法**（**直接法**:Direct Method）と**反復法**（Iterative Method）であり、どちらもガウスが深くかかわっている。ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス（Johann Carl Friedrich Gauss : 1977−1855）はドイツの数学者、天文学者、物理学者であり、19 世紀最大の数学者の一人といわれている。

まず、反復法についてその概要を述べる。同法は、市販の構造解析や自動設計のソフトでは使われていない。収束時間が一定でないし、問題によっては解が発散する。ただし、直接法に比べメモリ量や計算量が少ないなどの利点も多く、特に、未知数が極端に大きい場合や、係数行列がスパースの場合など、素早く収束し解が求まることもある。いずれにしても前処理が必要となり、使いこなすには経験が必要となる。

反復法は適当な初期値から始めて、繰り返し計算で真の解に収束させる手法である。反復計算時、解ベクトル以外は変化しない**定常法**と、拘束条件や最適化条件などが加わる**非定常法**がある。古典的な定常法は、ヤコビ(Jacobi)法、ガウス・ザイデル(Gauss-Seidel)法、及び修正項を加速させる SOR(Successive Over-Relaxation)法がある。n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ を上三角 U と下三角 L 及び対角 D の行列の和とすると、連立方程式は次式で表され、ヤコビ法の反復漸化式が導かれる」。

$$(L+D+U)x=b \rightarrow Dx=b-(L+U)x$$
$$x^{(k+1)}=D^{-1}(b-(L+D)x^{(k)})$$

ガウス・ザイデル法は、ヤコビ法を少し変形した以下の漸化式を用いる。解 $x_{i+1}^{(k+1)}$ を求める際、既に求めた解 $x_j^{(k+1)}(j=1\sim i-1)$ を用いるため、ヤコビ法より収束が早い。

$$(L+D+U)x=b \rightarrow (L+D)x=b-Ux$$
$$x^{(k+1)}=D^{-1}(b-Lx^{(k+1)}-Dx^{(k)})$$

SOR 法は、ガウス・ザイデル法に加速パラメータ ω を導入し、修正量

を拡大することで加速する方法である。収束するか否かの収束条件として、「対角優位な行列で、スペクトル半径が 1 より小さい」がある。これら行列の特性については、他の参考書を参照されたい。

非定常法は、Krylov 部分空間（subspace）への写像を基底として使用するため Krylov 部分空間法とも呼ばれる。代表的な方法として共役勾配(CG: Conjugate Gradient)法がある。その他には、BICGSTAB (Bi - Conjugate Gradient Stabilized)法や GMRES (Generalized Minimal Residual)法がある。これらも同様に他の参考書を参照されたい。

次に、市販解析ソフトで良く用いられる消去法をみていこう。まず、ガウスの消去法であり、この方法は前進消去と後退代入の 2 段階で解を求める。第 1 段階の前進消去で上三角行列に変換する。途中で対角項が零となるとピボットを行って対処する。第 2 段階では、後退代入により下から順に解を求める。同法は中学時代に 3 次元程度で習得した方法であり、なじみ深い。計算量は $n^3/3$ 程度であり、未知数が多くなると極端に時間がかかるようになる。しかも、係数行列は計算段階で変化するため、定数項が複数あると面倒である。

連立方程式の解法は、精度、安定性、処理スピードが重要、前 2 つは当然であるが、未知数が多くなるに従って処理スピードとメモリ量が大切となる。処理スピードを向上させるためには、ハードウエア、計算基礎技術、解法のアルゴリズムから考える必要があり、ここでは、次の釣合式に対するアルゴリズムについて分析する。

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$$

ガウスの消去法から進化した **LDU** 分解法がある。特に、剛性行列 $\mathbf{K}$ が実対称であると、$\mathbf{LDL}^T$ 分解が可能となり、係数行列は半分で良い。しかも分解後の情報を元の位置に収納することができ、メモリ量でも大変有利となる。この分解法は荷重項 $\mathbf{p}$ に関連しないため、一度分解すると多くの荷重項に対する変位が得られる。骨組構造では、剛性行列の対角項近くに値が集まる傾向があり、このことを利用した半バンド**コレスキー分解法**がある。バンド巾が小さいと圧倒的な処理スピードが得られる。同法の剛性行列は $n\times$ 最大バンド幅による 2 次元配列であり、バンド幅に影響を受ける。そのため、構造物の節点番号の分布状況、特に立体骨組ではバンド巾が大きくなり、同法の利点が半減する。

上記の欠点を克服した手法として、**スカイライン法**がある。同法は 1 次元配列で剛性行列が保存され、各行でバンド幅が異なっても良く、ある行がたまたま大きくても一向にかまわないことになる。PC でも、現在では同法を用いて数万元の連立方程式が解かれている。