第１話　梁理論の仮定を知る

SPACE で学ぶ構造力学シリーズは、内容が徐々に難しくなり、初学者にはとても理解し難いテキストとなってきた。そこで、「雑学・構造力学と数値計算」では、建築構造で使用する骨組の構造力学と、その数値計算に関する理論と経験則を雑学として、なるべく分かり易く、理論式も必要最小限で紹介する。構造力学や数値解析を学ぶ上で多少なりとも役に立てばと願っている。話題は思いつくままなので、どこから読んでも良い。どこまで書けるか分からないが、お付き合い願いたい。

最初はやはり、梁理論について述べるべきであろう。ベルヌーイ・オイラーによる梁理論は、卓抜なアイデアであり、現在でも使用されている。この梁理論はベルヌーイ・オイラー(Bernouilli-Euler)梁といわれ、2 つの仮定：**平面保持の仮定と法線保持の仮定**から成り立っている。

ベルヌーイ家は 17 世紀以降に活躍した一族で、3 世代に渡って 8 人の傑出した数学者を輩出した。その中でもスイス・バーゼル出身のヤコブ、ヨハン、ダニエルの 3 人はずば抜けた数学者であった。この天才的数学一族で現在の工学に大きな影響を与えているのは、ヨハンの息子ダニエル(Daniel Bernoulli ; 1700-1782) である。特に、流体力学におけるベルヌーイの定理は有名。このダニエルとオイラーが活躍した年代は江戸元禄から京保時代であり、梁理論が既に 250 年余り前にできていたことに驚かされる。

オイラー(Leonhard Euler ; 1707-1783)はダニエルとは親友であり、工学の分野で協同研究を行っている。数学者であるヨハンから共に教育を受け、特にオイラーはヨハンから可愛がられ、嘱望されていたという。一方、ヨハンとダニエルは確執があり、親子といえども上手くいかない。天才同士でしかも親子、うまく付き合えないのは分かるような気がする。ダニエルとオイラーは物理学や工学、数学の分野で多くの業績を残し、我々にも梁理論や座屈理論として多大な恩恵をもたらしている。

応力を定義している物体内でモーメントの釣合条件を満たすと仮定すると以下の応力テンソルは対称テンソルとなる。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ひずみテンソルも同様に対称テンソルである。

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

さて、彼らの梁理論について話を戻すと、その主目的は梁断面内のひずみを、図心に関する 1 次式で表すことにある。つまり、図心の軸方向変位の変化率は軸ひずみに、たわみの曲率は曲げ歪に関連付けられる。このように簡単に断面内のひずみが求められるのは、平面保持の仮定と法線保持の仮定による。この仮定より、梁の微分方程式、断面力と外力の力の釣合、断面性能などが導かれる。これらについては、構造力学のテキストには必ず記載されており、ここでは触れない。手元にある建築

構造力学の本を開き、復習すると良い。

弾性論における基本中の基本は、次の 2 つの関係である。

１）応力とひずみの関係

２）変位とひずみの関係

3 次元物体では、変位はu,v,wで表され、また応力はσ_{ij}と書く。下添え字のi,jは共に 1 から 3 をとるため、その要素は 9 つとなる。同様に、ひずみはε_{ij}と書き、応力と同様に 9 つ存在する。これらは応力テンソル、ひずみテンソルと呼ばれ、このテンソル間の関係が応力とひずみの関係と呼ばれる。詳細は、力学のテキストを参照されたい。

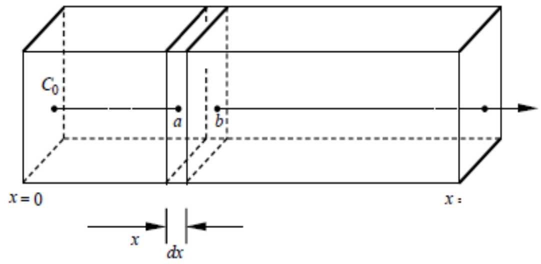

図１　梁変形前の平面

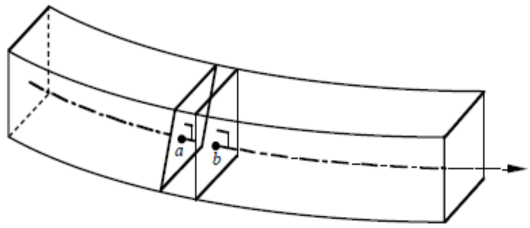

図２　梁変形後の平面

ベルヌーイ・オイラー梁では、上記 2 つの関係は次式で表されるように、各々1 つの式となる。

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y\frac{d^2w}{dx^2} - z\frac{d^2v}{dx^2}$$

応力もひずみも軸方向(一般には x 方向とする)にのみ生じるとしており、下添え字xで表す。軸方向しか考慮しないため、この下添え字を省いて、σ,εと表記することもある。弾性係数E_xも同様である。

他の応力やひずみ、あるいは他の方向の弾性係数Eやせん断弾性係数G、ポアソン比νはいったいどうなっているのか。その秘密は平面保持の仮定にある。この仮定は単に軸方向のひずみを求めるだけのものではない。他のひずみについてもこの仮定が生きている。平面保持とは、その**平面自身は剛体**であり、伸縮することも、せん断変形することもなく、ε_x以外のひずみは全てゼロとしている。つまり、次式を仮定する。また、軸方向以外の他の応力もゼロとする。

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

ただし、せん断応力τ_{xy},τ_{xz}は図 2 の切断面における応力の釣合より、ゼロとはならず値を持つ。このような値となるためには、応力とひずみの関係の中で、弾性係数E_x以外の弾性係数とせん断弾性係数G_{xy}、ポアソン比ν_{xy}などが次の値である必要があり、暗黙の内にベルヌーイ・オイラー梁ではこれらを仮定していることになる。

$$E_y = E_z = \infty; \quad G_{xy} = G_{xz} = G_{zy} = \infty$$

$$\frac{\nu_{xy}}{G_{xy}} = \frac{\nu_{xz}}{G_{xz}} = \frac{\nu_{yz}}{G_{yz}} = 0$$

断面内に生じる力を、応力あるいは応力度という。応力と応力度、この言葉の使い分けは、本によって異なる。部材内に生じる力を応力とすると、それらの集合である軸力、曲げモーメントなどを総称して断面力と呼ぶ。また、応力に対してひずみと呼ぶ。
一方、応力度と呼ぶと軸力や曲げモーメント、せん断力は総称して応力と呼ぶ。また、応力度に対してひずみ度を用いる。