基礎９７話 No.1　固定法の考え方
不釣合モーメントの解放

今回から固定法についてお話しする。ここでは、たわみ角法の基本式を用いて固定法の解析手法を導く。たわみ角法では、釣合式は連立方程式で表わされ、大きな構造物ではコンピュータを用いないと方程式の解を得ることは難しい。一方、固定法の利点は、釣合式を連立方程式で表わさず、反復解法によって材端モーメントが直接求められることにある。しかも表形式で反復解法が行われ、間違うことが少ない。そのため、手計算でも実構造物の応力解析が可能となる。これが固定法の大きな利点であり、特徴でもある。

固定法の基本的な仮定は、たわみ角法と全て同じであり、軸方向の伸縮は無視されている。また、節点移動のある場合とない場合とでは解析方法が異なり、節点移動のある場合、整形骨組と異型骨組においても解析方法が異なる。特に、異型骨組では収束も悪く、固定法では解析し難い。ここでは、異形骨組の固定法については触れないことにする。

最初に、節点移動のない場合の固定法について学ぶ。まずは、たわみ角法の基本を以下のように復習しよう。このテキストで使用する座標系は、右手・右ネジの法則に従った座標系を用い、各々の部材では部材の左端の i 点を原点とする。部材は、長さが l で、一様なヤング係数 E と断面二次モーメント I を有するものとする。また、これらのパラメータによる剛比 k を用いて固定法の解析を行う。なおここでも、解析対象は平面骨組とする。

まず、たわみ角法の基本式を示し、変数変換による方法を復習しよう。

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij};\quad M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji}\qquad\cdots\cdots(1)$$

骨組の中で代表的な部材を一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次の $K_0=2EI_0/l_0$ で定義し、このパラメータ K_0 を**標準剛度**と呼ぶ。ただし、I_0 と l_0 はその部材の断面二次モーメントと部材長さである。　この標準剛度を用いて、たわみ角法の基本式を次にように変換する。

$$M_{ij}=k(2\varphi_i+\varphi_j+\psi)-C_{ij};\quad M_{ji}=k(2\varphi_j+\varphi_i+\psi)+C_{ji}\qquad\cdots\cdots(2)$$

上式では、パラメータと新しい変数を次のように定義している。

$$k=\frac{K}{K_0};\quad K=\frac{2EI}{l};\quad \varphi_i=\theta_iK_0;\quad \psi=-3RK_0\qquad\cdots\cdots(3)$$

新しいパラメータとして定義した k は**剛比**と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対する当該部材の曲げ剛性の倍率を表す。

本文で固定法の計算手順を説明するが、手続きの意味や収束過程が、今ひとつ理解し難いと思う。そこでここでは、固定法の考え方あるいは反復解析手法について概説する。

骨組が外力と釣合う状態とは如何なることか。例えば、支持点以外に拘束なしで骨組がこれ以上動かないこと、つまり節点回転角と部材角がさらに変化しないことである。固定法は、まず変位全てを拘束し、断面力分布を求めた後、一つの節点の拘束を解いて断面力分布を変化させ、この操作を全節点に行い、反復しながら釣合状態に近づける手法である。如何なる方法で、上記の操作を行うのか、具体的に説明しよう。

１：まず、変位ゼロの状態で、全ての節点回転角と部材角を拘束し、部材荷重による固定端モーメントと水平荷重による層モーメントを部材両端の節点に、外力項として加える。この状態で拘束を解けば、当然、節点でのモーメントの釣合と層モーメントの釣合は得られておらず、不釣合状態となる。

２：不釣合状態を解消するため、次の反復処理を行う。多数の不釣合モーメントを同時に解放することは難しいので、まず一つの節点のみ拘束を解き、他の変位は拘束のままとする。この状態の解析解は得られており、分割モーメントと到達モーメントで容易に得られる。その後その節点を再度拘束する。到達モーメントは隣接する節点に新たな不釣合モーメントを生じさせるが、その値は分割モーメントより小さい。

３：次に、次々と上記の操作を行う節点を移動させ、同じ操作を繰り返す。この操作を全節点について行うが、先に記した到達モーメントによって不釣合モーメントは残ることになる。

4：この一連の操作を数回反復することで、各節点の不釣合モーメントを徐々に小さくし、収束閾値以下にする。
5：反復が終了すると節点でのモーメントの釣合が得られる。ただし、この状態では層モーメントの釣合は得られていない。
層モーメントの釣合を得る手法として２つの方法を紹介するが、節点移動のある場合の項とカーニー法の項で解説する。

固定法の原理を図 1 に示す骨組を用いて説明する。この骨組は、節点 i で剛接し、他の節点は全て固定支持とする。まず、式(2)より、境界条件を考慮した 3 つの部材に関するたわみ角法の基本式を以下に示す。ここでは、節点移動がないため部材角はゼロである。

$$\left.\begin{array}{l} M_{i1}=k_1(2\varphi_i);\quad M_{1i}=k_1(\varphi_i) \\ M_{i2}=k_2(2\varphi_i);\quad M_{2i}=k_2(\varphi_i) \\ M_{i3}=k_3(2\varphi_i);\quad M_{3i}=k_3(\varphi_i) \end{array}\right\}\cdots\cdots(4)$$

次に、この節点 i におけるモーメントの釣合を考える。この節点には、荷重として、モーメント $\bar{M}_i$ が加わっている。図 2 を参考にすると、モーメントの釣合は次式で与えられることが分かる。

$$M_{i1}+M_{i2}+M_{i3}=\bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(5)$$

上式に、式(4)の材端モーメントを代入し、整理すると、

$$2(k_1+k_2+k_3)\varphi_i=\bar{M}_i \qquad \cdots\cdots(6)$$

となり、節点 i の回転角 φ_i は、次式で与えられる。

$$\varphi_i=\frac{\bar{M}_i}{2(k_1+k_2+k_3)}=\frac{\bar{M}_i}{2\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで、$\sum k_i$ は節点 i に集まる部材の剛比の和を表す。得られた回転角を材端モーメントの式(4)に代入すると、

$$\left.\begin{array}{l} M_{i1}=\dfrac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i;\quad M_{1i}=\dfrac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i=0.5M_{i1} \\ M_{i2}=\dfrac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i;\quad M_{2i}=\dfrac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i=0.5M_{i2} \\ M_{i3}=\dfrac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i;\quad M_{3i}=\dfrac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i=0.5M_{i3} \end{array}\right\}\cdots\cdots(8)$$

として、材端モーメントが得られる。この骨組の曲げモーメント分布が式(8)の材端モーメントから図 3 のように得られる。

少し、見方を変えて解析経過を分析しよう。$\bar{M}_i$ は節点 i に加わるモーメント荷重であるが、これを不釣合モーメントであるとする。つまり、この骨組には、ある曲げモーメント分布が存在するが、この時点では各節点モーメントの釣合が取れていない。そこで、節点 i に着目し、この不釣合モーメントを解消するために、まず全節点を拘束し、当該節点のみ自由とする。この操作で新たな回転角が発生し、節点 i におけるモーメントの不釣合状態が解消される。他端にもモーメントが発生し、その節点に新たな不釣合モーメントを加えられる。ただし、この到達モーメントは節点 i の不釣合モーメントより小さい。これら一連の処理を**不釣合モーメントの解放**と呼ぶ。以降の説明は次回行う。

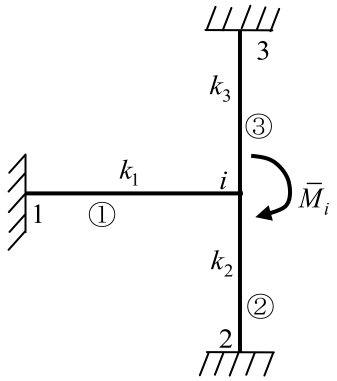

図 1 固定法の原理を説明するモデル

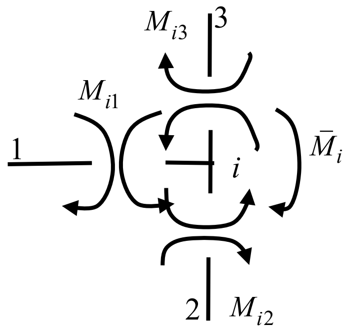

図 2 荷重と材端モーメント

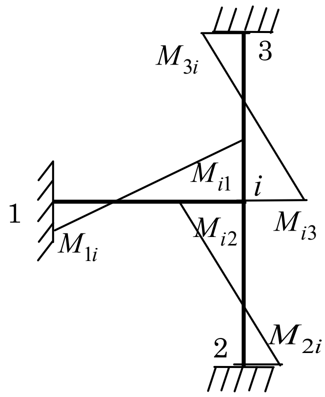

図 3 曲げモーメント図