基礎９４話 No.6　２層柱抜け骨組の節点モーメントの釣合式

付 20 話参照
ex94_1

今回も、異形ラーメンに関する応力解析の続きである。仮想変位によって生じる外力仕事を求め、式(27)の右辺項を計算する。外力に対応する変位及び外力仕事は、図 7 より部材角によって次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix}\tilde{u}_3\\ \tilde{u}_6\\ \tilde{v}_7\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1\tilde{R}_1 \\ h_1\tilde{R}_1 + h_2\tilde{R}_5 \\ l_1 \tilde{R}_6\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1\tilde{R}'_1\\ h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5\\ l_1\tilde{R}'_2\end{Bmatrix} \to \begin{bmatrix}V_3\\V_6\\V_7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_1\tilde{u}_3\\P_2\tilde{u}_6\\P_3\tilde{v}_7\end{bmatrix};\quad V=V_3+V_6+V_7 \qquad \cdots\cdots(52)$$

次に、式(27)右辺の荷重に対応する変位項を求めておく。

$$\sum_{j=1}^{7}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \to \begin{bmatrix}
\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_4} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_5} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_6} & \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{R}_7}\\
\frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_4} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_5} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_6} & \frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial \tilde{R}_7}\\
\frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_4} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_5} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_6} & \frac{\partial \tilde{v}_7}{\partial \tilde{R}_7}
\end{bmatrix}\left[H\right] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ h_1 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -l_1/l_2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0\\ h_1 & 0 & h_2\\ 0 & l_1 & 0\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(53)$$

上式を利用して、式(27)の右辺項を計算する。

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}P_k\sum_{j=1}^{7}\frac{\partial u_k}{\partial R_j}H_{jl} \to \frac{-1}{3}\begin{Bmatrix}\frac{\partial V}{\partial R'_1}\\ \frac{\partial V}{\partial R'_2}\\ \frac{\partial V}{\partial R'_5}\end{Bmatrix} = \frac{-1}{3}\left(\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0\\ h_1 & 0 & h_2\\ 0 & l_1 & 0\end{bmatrix}\right)^T = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix}h_1(P_1+P_2)\\ l_1P_3\\ h_2P_2\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(54)$$

上記のように行列を用いて、独立部材角に関する釣合式の右辺項を求めたが、この値を検証するため、式(52)右の各節点における外力仕事から右辺項を求めてみよう。

1）節点 3： $\frac{\partial V_3}{\partial \tilde{R}'_1} = P_1\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1)}{\partial \tilde{R}'}P_1h_1;\quad \frac{\partial V_3}{\partial \tilde{R}'_2}=0;\quad \frac{\partial V_3}{\partial \tilde{R}'_5}=0$ ……(55)

2）節点 6： $\frac{\partial V_6}{\partial \tilde{R}'_1} = P_2\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5)}{\partial \tilde{R}'_1} = P_2h_1;\quad \frac{\partial V_6}{\partial R'_2}=0;\quad \frac{\partial V_6}{\partial R'_5} = P_2\frac{\partial(h_1\tilde{R}'_1+h_2\tilde{R}'_5)}{\partial \tilde{R}'_5} = P_2h_2$ ……(56)

3）節点 7： $\frac{\partial V_7}{\partial \tilde{R}'_1}=0;\quad \frac{\partial V_7}{\partial \tilde{R}'_2} = P_3\frac{\partial(l_1\tilde{R}'_2)}{\partial \tilde{R}'_2} = P_3l_1;\quad \frac{\partial V_7}{\partial R'_5}=0$ ……(57)

右辺項は、各独立材角の微分項の和を取り、-1/3 を掛けることで得られる。得られた結果は、式(54)に一致する。

以上をまとめ、全体釣合式を行列形式で示す。各断面力図を求める手

順はこれまでと同じであり、次の連立方程式を解き、その解を材端モーメントに代入して求める。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\ k_3 & 2(k_2+k_3+k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_2 \\ 0 & k_4 & 2(k_1+k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 2(k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2+k_3) & 0 & k_3 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_1) & 0 & 0 \\ k_3 & k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_3 & k_3 & 0 & \frac{2}{3}(2k_3+(\frac{l_1}{l_2})^2k_4) & 0 \\ k_2 & k_2 & 0 & k_2 & k_2 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_5 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1(P_1+P_2) \\ l_1P_3 \\ h_2P_2 \end{Bmatrix} \cdots\cdots(58)$$

これまで、2 つの例題を用いて、異形ラーメンに関する全体釣合式の求め方を学んだ。記号を用いたため、全体釣合式である連立方程式を解くことが難しく、実際の断面力図を求めることができなかった。そこで、各パラメータに値を設定して、最後まで応力解析を行い、断面力図を求めてみよう。

1）両端固定の山形ラーメン　　**ex94_1**

梁、柱共に以下の同じ H 型断面を使用する。材質は SS400、H400x200x8x13 であり、断面二次モーメントは 23500cm^4、ヤング係数は 20500kN/cm^2 とする。柱の剛比 k_1 を 1 とすると、梁の剛比は次式となる。

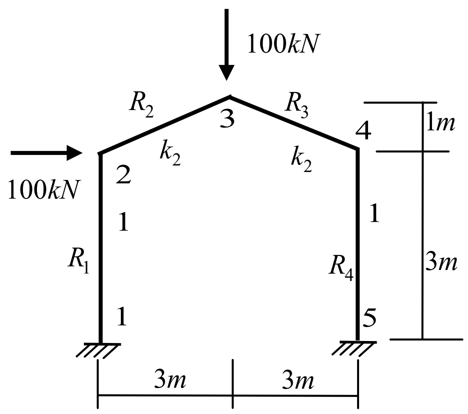

図 8 課題 1 の異形ラーメン

$$\left.\begin{aligned} &K_0=\frac{2EI}{h_1};\quad K_2=\frac{2EI}{l_2};\quad l_2=\sqrt{3^2+1^2}=3.162; \\ &\frac{h_2}{h_1}=0.333;\quad k_2=\frac{2EI/l_2}{2EI/h_1}=\frac{300}{316.2}=0.9487 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(59)$$

ここで、l_2 は梁 1 本の長さであり、l は骨組のスパン長の 6m、h_1 は 3m、h_2 は 1m である。

独立部材角を R_1, R_4 とすると、釣合式は式(42)より次式となる。

$$\begin{bmatrix} 3.8974 & 0.9487 & 0 & -0.4231 & 1.4231 \\ 0.9487 & 3.7948 & 0.9487 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 3.8974 & 1.4231 & -0.4231 \\ -0.4231 & 0 & 1.4231 & 3.5128 & -2.8461 \\ 1.4231 & 0 & -0.4231 & -2.8461 & 3.5128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi'_1 \\ \psi'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -150 \end{Bmatrix} \cdots\cdots(60)$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi'_1 \\ \psi'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47.63 \\ -19.49 \\ 30.36 \\ -115.25 \\ -151.72 \end{Bmatrix} \cdots\cdots(61)$$

上の 5 元の連立方程式の解を求めることは、かなり難しいので、ここでは添付した Excel VBA の連立方程式を解くプログラムで解を求める。

得られた方程式の解を右欄に示す。以降は次回お話しする。