基礎９３話 No.5　独立部材角による モーメントの釣合式

今回は、前回の異形ラーメンに関する応力解析の続きである。式(39)を利用して、式(27)の右辺項を計算する。

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2}P_k\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial R_1'}\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial R_4'}\end{Bmatrix} = \frac{-1}{3}\left(\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & 0\\ -\dfrac{l}{2}\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{l}{2}\dfrac{h_1}{2h_2}\end{bmatrix}\right)^T = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} P_1h_1 - P_2\dfrac{h_1 l}{4h_2}\\[2mm] P_2\dfrac{h_1 l}{4h_2}\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(40)$$

これで、2 つの独立部材角に関する項は全て求められた。これらをまとめると、独立部材角に関するモーメントの釣合式は、行列表示を用いると、次のように表される。

$$\begin{bmatrix} k_1 - k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & 0 & k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2) & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2\\[3mm] k_2(\dfrac{h_1}{2h_2}) & 0 & k_1-(\dfrac{h_1}{2h_2})k_2 & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{h_1}{3}P_1 + \dfrac{l}{12}\dfrac{h_1}{h_2}P_2\\[3mm] -\dfrac{l}{12}\dfrac{h_1}{h_2}P_2\end{Bmatrix} \quad\cdots\cdots(41)$$

節点方程式(35)と層モーメントの釣合に対応する釣合式(41)をまとめると、全体の釣合式が得られる。以上のように得られた 5 元の連立方程式は次式となり、剛性行列は対称となっている。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2\\[3mm] k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0\\[3mm] 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2\\[3mm] k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & 0 & \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2) & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2\\[3mm] \dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & 0 & k_1-\dfrac{h_1}{2h_2}k_2 & -\dfrac{1}{3}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2 & \dfrac{2}{3}(k_1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{h_1}{h_2})^2k_2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\\ \psi_1'\\ \psi_4'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -\dfrac{h_1}{3}P_1+\dfrac{lh_1}{12h_2}P_2\\[3mm] -\dfrac{lh_1}{12h_2}P_2\end{Bmatrix} \quad\cdots\cdots(42)$$

上の 5 元の連立方程式を解き､その解を材端モーメントに代入して、曲げモーメント図を描く。後の処理は整形の骨組の解析と全く同じである。ただし、上の記号の入った連立方程式を解くことはかなり難しい。後で、剛比や荷重の値、骨組形状を決めて数値計算することで、解を検証する。

次に、図 7 に示す例題を用いて、骨組の釣合式を求める。こ骨組では、梁に部材角が生じるため、異形ラーメンとなる。部材角間の依存関係は既に求められており､式(18)より次式で与えられる。

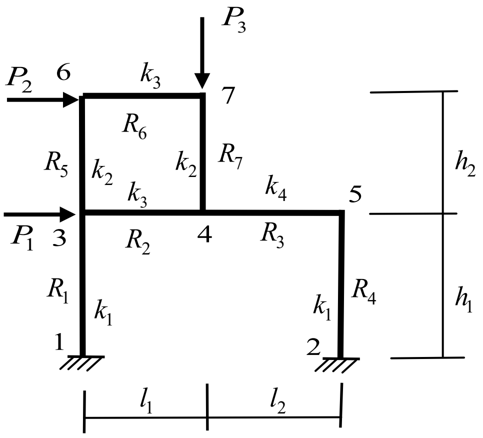

図 7 2 層の異形ラーメン

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_5 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} H_{ij} R'_{jl} \to [H] = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & H_{2,3} \\ H_{3,1} & H_{3,2} & H_{3,3} \\ H_{4,1} & H_{4,2} & H_{4,3} \\ H_{5,1} & H_{5,2} & H_{5,3} \\ H_{6,1} & H_{6,2} & H_{6,3} \\ H_{7,1} & H_{7,2} & H_{7,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots(43)$$

ここで、独立部材角は、柱の R_1, R_5 と梁の R_2 の 3 つである。

節点数は 7 で、固定支持の 2 を除くと、節点回転角は 5 自由度となる。独立部材角は 3 であり、従って、全自由度は 8 となる。最初に、式(43)を参照して、節点方程式を作る。これは読者の演習とする。ただ、部材荷重及び節点モーメント荷重はないので、右辺項はゼロとなる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\ k_3 & 2(k_2+k_3+k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3-\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_2 \\ 0 & k_4 & 2(k_1+k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 2(k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2+k_3) & 0 & k_3 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots(44)$$

次に、式(27)より、各独立部材角に関するモーメントの釣合を求める。独立部材角は両柱の部材角 R_1, R_5 と梁の R_2 である。最初に、仮想変位として独立部材角 $\bar{R}'_1, \bar{R}'_2, \bar{R}'_5$ を与えたときの内力仕事から式(27)の左辺項を求める。なお、式(43)より部材角の独立部材角による微分は式(43)の H_{ij} である。以下に、各部材の式(27)の左辺項を求める。

1）第 1 部材： $\dfrac{dU_1}{dR'_1} = k_1(\varphi_3 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{1j}\psi'_j)H_{11} = k_1(\varphi_3 + \dfrac{2}{3}\psi'_1);\quad \dfrac{dU_1}{dR'_2} = 0;\quad \dfrac{dU_1}{dR'_5} = 0$ ……(45)

2）第 2 部材： $\dfrac{dU_2}{dR'_1} = 0;\quad \dfrac{dU_2}{dR'_5} = 0;\quad \dfrac{dU_2}{dR'_2} = k_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{2j}\psi'_j)H_{22} = k_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \dfrac{2}{3}\psi'_2)$ ‥(46)

3）第 3 部材： $\dfrac{\partial U_3}{\partial R'_1} = 0;\quad \dfrac{\partial U_3}{\partial R'_5} = 0;$

$$\frac{\partial U_3}{\partial R'_2} = k_4(\varphi_4 + \varphi_5 + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{3j}\psi'_j)H_{32} = k_4(\varphi_4 + \varphi_5 - \frac{2}{3}\frac{l_1}{l_2}\psi'_2)(-\frac{l_1}{l_2}) = k_4(-\frac{l_1}{l_2}\varphi_4 - \frac{l_1}{l_2}\varphi_5 + \frac{2}{3}(\frac{l_1}{l_2})^2\psi'_2) \quad \cdots\cdots(47)$$

4）第 4 部材： $\dfrac{\partial U_4}{\partial R'_1} = k_1(\varphi_5 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{4j}\psi'_j)H_{41} = k_1\varphi_5 + \dfrac{2}{3}k_1\psi'_1;\quad \dfrac{\partial U_4}{\partial R'_2} = 0;\quad \dfrac{\partial U_4}{\partial R'_5} = 0$ ……(48)

5）第 5 部材： $\dfrac{\partial U_5}{\partial R'_1} = 0;\quad \dfrac{\partial U_5}{\partial R'_2} = 0;\quad \dfrac{\partial U_5}{\partial R'_5} = k_2(\varphi_3 + \varphi_6 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{5j}\psi'_j)H_{53} = k_2(\varphi_3 + \varphi_6 + \dfrac{2}{3}\psi'_5)$ ……(49)

5）第 6 部材： $\dfrac{\partial U_6}{\partial R'_1} = 0;\quad \dfrac{\partial U_6}{\partial R'_5} = 0;\quad \dfrac{\partial U_6}{\partial R'_2} = k_3(\varphi_6 + \varphi_7 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{6j}\psi'_j)H_{62} = k_3(\varphi_6 + \varphi_7 + \dfrac{2}{3}\psi'_2)$ ……(50)

7）第 7 部材： $\dfrac{\partial U_7}{\partial R'_1} = 0;\quad \dfrac{\partial U_7}{\partial R'_2} = 0;\quad \dfrac{\partial U_7}{\partial R'_5} = k_2(\varphi_4 + \varphi_7 + \dfrac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} H_{7j}\psi'_j)H_{73} = k_2(\varphi_4 + \varphi_7 + \dfrac{2}{3}\psi'_5)$ ……(51)