基礎９２話 No.4　山形ラーメンの節点モーメントの釣合式

これまで、たわみ角法によって異形ラーメンの釣合式全体を誘導した。今回から、演習を通して異形ラーメンの応力解析法を学ぶことにする。

まず、図 6 に示す切妻屋根を有する骨組を用いて、骨組全体の釣合式を求めてみよう。まず、独立部材角を R_1, R_4 とすると、部材角の関係は、式(7)に見られるように次式で与えられる。

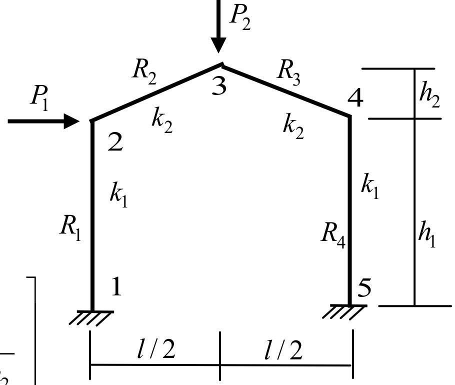

図 6 異形ラーメンの解析モデル

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} H_{ij} R'_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_4 \end{Bmatrix} \to [H] = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \\ H_{3,1} & H_{3,2} \\ H_{4,1} & H_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(30)$$

ここでは、独立部材角として両柱の部材角を選択している。

このモデルでは、自由節点 n' は、支持点 1,5 を除いた 2,3,4 の 3 節点である。また、独立部材角数 n は、R_1, R_4 の 2 つである。

次に、仮想仕事の原理を用いたモーメントの釣合を求める。釣合式は、式(29)より求められ、具体的に境界条件を考慮して節点でのモーメントの釣合を求めてみよう。各節点でのモーメントの釣合を以下に再記する。

$$\sum_{k=1}^{m} \{k_k(2\varphi_i + \varphi_j + \sum_{l}^{n} H_{kl}\psi'_l) - C_{ij}\} - m_i = 0 \quad (i = 1 \sim n') \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

このモデルでは、部材荷重並びに節点モーメント荷重がないため、C_{ij}, m_i はゼロとなり、従って、モーメント釣合式には定数項である右辺ベクトルはゼロとなる。

以下に各節点で、モーメントの釣合を具体的に求める。

第 2 節点：$M_{21} + M_{23} = 0 \to$

$$k_1(2\varphi_2 + \psi_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \psi_2) = 0 \to$$
$$k_1(2\varphi_2 + \sum_{l=1}^{2} H_{1l}\psi'_l) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \sum_{l=1}^{2} H_{2l}\psi'_l) = 0 \to$$
$$k_1(2\varphi_2 + \psi'_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

第 3 節点：$M_{32} + M_{34} = 0 \to$

$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \psi_2) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi_3) = 0 \to$$
$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \sum_{l=1}^{2} H_{2l}\psi'_l) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \sum_{l=1}^{2} H_{3l}\psi'_l) = 0 \to$$
$$k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) + k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) = 0 \to$$
$$k_2(\varphi_2 + 4\varphi_3 + \varphi_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(32)$$

第 4 節点：$M_{43} + M_{45} = 0 \to$

$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \psi_3) + k_1(2\varphi_4 + \psi_4) = 0 \to$$
$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \sum_{l=1}^{2} H_{3l}\psi'_l) + k_1(2\varphi_4 + \sum_{l=1}^{2} H_{4l}\psi'_l) = 0 \to$$
$$k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \frac{h_1}{2h_2}\psi'_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi'_4) + k_1(2\varphi_4 + \psi'_4) = 0 \qquad \cdots\cdots(33)$$

以上をまとめ、行列表示すると、次の節点方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1-\frac{h_1}{2h_2}k_2 & \frac{h_1}{2h_2}k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & \frac{h_1}{2h_2}k_2 & k_1-\frac{h_1}{2h_2}k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1' \\ \psi_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdots(34)$$

次に、式(27)を用いて層モーメントの釣合に対応する釣合式を求める。

$$\sum_{k=1}^{all} k_k(\varphi_i+\varphi_j+\frac{2}{3}\sum_{o=1}^{n} H_{ko}\psi_o')H_{kl} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b} P_k \sum_{j=1}^{all} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j} H_{jl} \quad (l=1\sim n) \cdot\cdot(27)$$

このモデルでは、上式の独立部材角は両柱の部材角 R_1, R_4 であり、独立部材角と従属部材角の関係 H_{ij} は式(30)で与えられている。

以下に、式(27)の各部材の左辺項を求める。

1）第 1 部材：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial R_1'} &= k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{1j}\psi_j')H_{11} = k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\psi_1')(1) = k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\psi_1') \\ \frac{\partial U_1}{\partial R_4'} &= k_1(\varphi_2+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{1j}\psi_j')H_{12} = 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)$$

2）第 2 部材：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial R_1'} &= k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{2j}\psi_j'\}H_{21} = k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')\}(-\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2+(-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3+\frac{1}{6}((\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \\ \frac{\partial U_2}{\partial R_4'} &= k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{2j}\psi_j')\}H_{22} = k_2\{\varphi_2+\varphi_3+\frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1'+\frac{h_1}{2h_2}\psi_4')\}(\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2+(\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3+\frac{1}{6}(-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'+(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)$$

3）第 3 部材:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial R_1'} &= k_2\{\varphi_3+\varphi_4+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{3j}\psi_j'\}H_{31} = k_2\{\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3+\frac{h_1}{2h_2}\varphi_4+\frac{1}{6}((\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \leftarrow H_{31}=\frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial R_4'} &= k_2\{\varphi_3+\varphi_4+\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{2} H_{3j}\psi_j'\}H_{32} = k_2\{-\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3-\frac{h_1}{2h_2}\varphi_4+\frac{1}{6}(-(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1'+(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4')\} \leftarrow H_{32}=-\frac{h_1}{2h_2} \end{aligned}\right\}\cdot\cdot(37)$$

4）第 4 部材： $\frac{dU_4}{dR_1'}=0;\quad \frac{dU_4}{dR_4'}=k_1(\varphi_4+\frac{2}{3}\psi_4)H_{42}=k_1(\varphi_4+\frac{2}{3}\psi_4') \leftarrow H_{41}=0; H_{42}=1 \qquad \cdots\cdots(38)$

次に、外力仕事を求める。外力に対応する 2 節点及び 3 節点の仮想変位 $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_3)$ は、部材角によって、$\tilde{u}_2 = h_1\tilde{R}_1;\ \ \tilde{v}_3 = l\tilde{R}_2/2$ として表される。

次に、式(27)右辺の節点仮想変位と独立部材角の関係を求めておく。

$$\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{R}_4} \\ \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_2} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_3} & \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{R}_4} \end{bmatrix}\left[H\right] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{h_1}{2h_2} & \frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ -\frac{l}{2}\frac{h_1}{2h_2} & \frac{l}{2}\frac{h_1}{2h_2} \end{bmatrix} \cdots\cdots(39)$$