基礎９１話 No.3　仮想仕事の原理による釣合式

今回は、たわみ角法により骨組全体の釣合式を誘導する。釣合式の数は境界節点を除いた節点数と独立部材角の数の和に等しい。整形骨組では、各層で独立部材角（層間変形角）がひとつあり、そのため、各層で層せん断力の釣合、あるいは層モーメントの釣合より、独立部材角と同じ数の釣合式が得られた。しかしながら、異形ラーメンでは、梁にも部材角が生じ、層数より多くの独立部材角が存在する。そこで、層モーメントの釣合式に替えて、独立部材角の数だけ釣合式を求める必要がある。ここでは、**仮想仕事の原理**を用いて釣合式を求める。仮想仕事の原理とは、「釣合状態の骨組に、境界条件を満たす仮想の変位を与えたとき、その仮想の変位による内力仕事と外力仕事は等しい」である。次に、この仮想仕事の原理を用いて異形ラーメンの釣合式を求めてみよう。

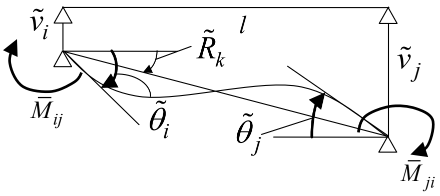

図 5 材端モーメントが加わっている両端ピン部材に仮想の回転角 $\tilde{\theta}_i$ と部材角 $\tilde{R}_k$ を与える

材端力と外力が加わっている部材に仮想の回転角 $\tilde{\theta}_i - \tilde{R}_k$ を与えたとき、内力仕事 U は材端モーメントを用いると次式で与えられる。ここでは、部材は剛体変位を生じており、内部応力は仕事をしないとしている。

$$U = \sum_{k=1}^{all}\{\bar{M}_{ij}(\tilde{\theta}_i - \tilde{R}_k) + \bar{M}_{ji}(\tilde{\theta}_j - \tilde{R}_k)\} = \sum_{k=1}^{all}\{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\tilde{R}_k\} \qquad \cdots\cdots(19)$$

上式の all は全部材数を意味し、$\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{ji}$ は部材荷重による固定端モーメントを除いた材端モーメントである。また、$\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j$ は仮想の部材両端の微小回転角であり、$\tilde{R}_k$ は同じく仮想微小部材角を意味する。次に、外力仕事 V は節点荷重 P_k と節点変位 $\tilde{u}_k$、及び節点モーメント荷重 m_k と部材荷重による固定端モーメント C_{kj} を考慮すると、次式となる。

$$V = \sum_{k=1}^{b} P_k \tilde{u}_k + \sum_{k=1}^{c}(m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k \qquad \cdots\cdots(20)$$

ここで、節点変位 $\tilde{u}_k$ は仮想微小部材角の関数であり、また b は節点に集中荷重が加わっている全節点数を、c は節点にモーメント荷重 m_k と部材荷重による固定端モーメント C_{ij} が加わっている全節点数を表す。

仮想仕事の原理より、仮想変位による内力仕事と外力仕事は等しくなり、次式を得る。

$$U = V \rightarrow \quad W = U - V = 0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

式（19）と（20）で求めた内力仕事と外力仕事及び式（11）を上式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{all}\{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\tilde{R}_k\} - \sum_{k=1}^{b} P_k \tilde{u}_k - \sum_{k=1}^{c}(m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k \rightarrow \\ &= \sum_{k=1}^{all}\{\bar{M}_{ij}\tilde{\theta}_i + \bar{M}_{ji}\tilde{\theta}_j - (\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})\sum_{l=1}^{n} H_{kl}\tilde{R}'_l\} - \sum_{k=1}^{b} P_k \tilde{u}_k - \sum_{k=1}^{c}(m_k + C_{kj})\tilde{\theta}_k = 0 \qquad \cdots\cdots(22) \end{aligned}$$

任意の仮想変位を与えても、上式が常に成立するためには、各仮想変位の係数はゼロでなくてはならない。そのため、式(12)を考慮すると、次式が成立する。ここで、n' は自由節点数、n は独立部材角数を表す。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{\theta}_i}=0 \quad (i=1\sim n'); \quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{R}'_l}=-\sum_{k=1}^{all}(\bar{M}_{ij}+\bar{M}_{ji})H_{kl}-\sum_{k=1}^{b}P_k\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}'_l}=0 \quad (l=1\sim n) \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

まず、式(22)及びたわみ角の基本式を用いると、上式左は次式となる。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{\theta}_i}=\sum_{k=1}^{m}\bar{M}_{ij}-m_i-\sum_{k=1}^{m}C_{ij}=0\rightarrow\sum_{k=1}^{m}\frac{EI_k}{l_k}(2\theta_i+\theta_j-3R_k)-C_{ij}-m_i=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

さらに、部材角 R_k は式(11)の独立部材角で表されることから、

$$\sum_{k=1}^{m}\{\frac{EI_k}{l_k}(2\theta_i+\theta_j-3\sum_{l}^{n}H_{kl}R'_l)-C_{ij}\}-m_i=0 \quad (i=1\sim n') \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

として、各節点におけるモーメントの釣合式が得られる。ここで m は当該節点に結合する部材数である。

次に、式(23)右にたわみ角の基本式を用い、さらに−3 で割ると、独立部材角に関するモーメントの釣合式が得られる。

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{R}'_l}=-\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k}{l_k}(3\theta_i+3\theta_j-6R_k)H_{kl}-\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}\frac{d\tilde{R}_j}{d\tilde{R}'_l}=0\rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k}{l_k}(\theta_i+\theta_j-2R_k)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \quad (l=1\sim n) \qquad \cdots\cdots(26)$$

上記の方程式は、整形ラーメンのたわみ角法では層モーメントの釣合に対応する。ここで、両辺を−3 で割る理由は全体釣合式の剛性行列を対称にするためである。

上式の左辺に標準剛度 K_0 を分母・分子に掛けると次式となり、釣合式が変数変換されることになる。

$$\sum_{k=1}^{all}\frac{2EI_k/l_k}{K_0}(\theta_iK_0+\theta_jK_0-2R_kK_0)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl}\rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{all}k_k(\varphi_i+\varphi_j+\frac{2}{3}\sum_{o=1}^{n}H_{ko}\psi'_o)H_{kl}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{b}P_k\sum_{j=1}^{all}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{R}_j}H_{jl} \quad (l=1\sim n)} \qquad \cdots(27)$$

ここで、変数変換に使用した変換式は次式である。

$$k=\frac{K}{K_0}; \quad K=\frac{2EI}{l}; \quad K_0=\frac{2EI_0}{l_0}; \quad \varphi_i=\theta_iK_0; \quad \psi=-3RK_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

同様に、釣合式(25)を変数変換すると次式を得る。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}\{k_k(2\varphi_i+\varphi_j+\sum_{l=1}^{n}H_{kl}\psi'_l)-C_{ij}\}-m_i=0 \quad (i=1\sim n')} \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

得られた式(27)と(29)の釣合式が異形ラーメンの基本釣合式となる。特に式(27)が整形ラーメンにおける層モーメントの釣合に対応する。次回から演習を行うことで理解を深めよう。