基礎９０話 No.2　従属関係を表す依存関係式

今回は、前回の続きで、部材角間の関係についてお話しする。先に、独立部材角として２つの柱を選択したが、他の部材を指定することもできる。式(3)で独立部材角を R_1, R_2 とし、他の部材との依存関係を調べてみよう。式(4)と同様に独立部材角を右辺に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -h_2 & -h_1 \\ l/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(8)$$

同様の操作を行い、独立部材角に対する部材角の関係を求めると、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \dfrac{2h_2}{h_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(9)$$

以上のように、独立部材角の選択を変えても、式(7)のように部材角間の依存関係が求められることになる。

一方、独立部材角として、２つの梁を選択する場合について考えてみよう。独立部材角を右辺項に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(10)$$

上式で、左辺の係数行列における行列式の値はゼロとなり、従属部材に関する部材角の値が求められない。このように独立部材角の選択は、従属部材による係数行列が特異行列にならず、逆行列が得られるようにしなければならない。

独立部材角と部材角の関係は、行列を用いて表すと次式となる。ここで、H_{ij} は依存関係を表す係数行列であり、all は全部材数を表す。

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} R_j' \qquad (i = 1 \sim all) \qquad \cdots\cdots(11)$$

ここで、R_j' は独立部材角であり、n はその数である。さらに上式をこの独立部材角で微分すると下式が得られ、後で使用することになる。

$$\frac{\partial R_i}{\partial R_j'} = H_{ij} \qquad \cdots\cdots(12)$$

他の例題を用いて、依存関係に関する知識を深めることにしよう。図4の異形ラーメンを用いて部材角依存関係を求める。図中には２つのループが見られ、従って、４つの制限条件があることを示す。部材数は計

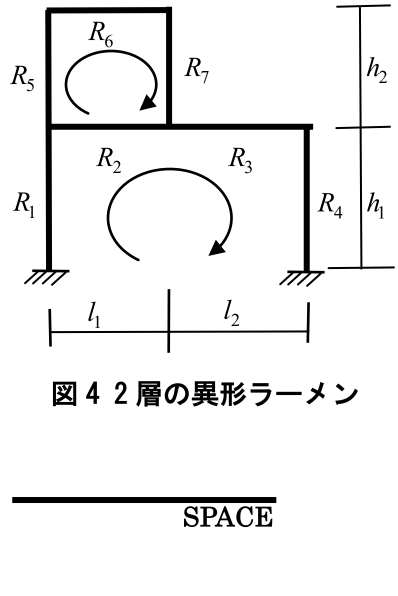

図４ ２層の異形ラーメン

7 であり、制限条件が 4 であることから、独立部材角は 3 となる。

第 1 層の制限条件を以下に示す。

1）x 方向の変位　　　　y 方向の変位

$$h_1R_1 - h_1R_4 = 0 \qquad l_1R_2 + l_2R_3 = 0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

次に、第 2 層では、

2）x 方向の変位　　　　y 方向の変位

$$h_2R_5 - h_2R_7 = 0 \qquad l_1R_6 - l_1R_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(14)$$

式(13)と(14)を行列を用いて表し、独立部材角として R_1, R_2, R_5 を選択する。さらに独立部材角の項を右辺に移項し、整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & -h_2 \\ 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \qquad \cdots(15)$$

独立部材角を各々1 として、従属部材角の値を求める。4 元の連立方程式で一見難しそうであるが、行を入れ替えると次のように係数行列は対角行列となっており、解は容易に求められる。

$$\begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(16)$$

各独立部材角に対し、1) $R_1 = 1$ の場合；2) $R_2 = 1$ の場合；3) $R_5 = 1$ の場合

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} R_1' \ ; \ \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1/l_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} R_2' \ ; \ \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} R_5' \qquad \cdots\cdots(17)$$

上の結果をまとめると、依存関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ R_5' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(18)$$

以上で、各部材の依存関係が得られた。この関係を用いて、層方程式に替わる釣合式を求める。以降は、次回お話しする。