基礎８９話 No.1　部材角の独立部材と従属部材

たわみ角法による異形ラーメンの解析は、構造力学初心者にとって少し難しいかもしれない。この部分は飛ばしてもかまわないが、可能ならば学習して欲しい。既に、多くのことを学んできたので、時間をかけてゆっくりと読めば、理解できると思う。今後、基礎から少し難しい領域に足を踏み入れるためにも、頑張ってみよう。

これまで、たわみ角法を用いて平面骨組の応力解析を行ってきたが、全て整形ラーメンについてである。たわみ角法では、部材の伸縮を無視し、節点の移動を部材角で表す。そこには利点と欠点がある。利点としては、未知数が少なく、手計算では圧倒的に有利である。また、節点における力の釣合や変位の適合では、座標変換を行う必要もない。座標変換は多くの計算を必要とし、手計算では間違う要因となる。

一方、欠点は、部材の伸縮が無視されるため、解析結果から軸力分布が決定できず、各節点においてせん断力との力の釣合から求め直す必要が生じる。さらに大きな短所として、部材の伸縮を考慮しないため、全部材の部材角は独立に回転することができず、節点が移動するためには部材角間に依存関係が生じる。整形ラーメンでは、この依存関係を表す独立部材角と従属部材角との関係は明解で、解析は容易であった。独立部材角は各層の層間変形角で表され、しかも、梁には部材角が生じない。この特徴を有しない骨組は、異形ラーメンとして分類され、これまで学んだ方法以外の手法を用いなければならない。そこで、今回から、異形ラーメンの解析方法を学ぶ。

最初に、部材角間の依存関係を求める。次に、これまでの層せん断力あるいは層モーメントの釣合に替えて、仮想仕事の原理により独立部材角に関するモーメントの釣合式を誘導する。さらに、例題を通して、独立部材角の数に対応する釣合式の構築手法を学ぶ。

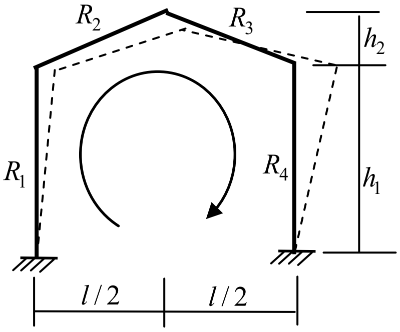


図 1 異形ラーメンの部材角間の依存関係

図 1 の骨組では、部材数が 4 であり、各々部材角は R_1, R_2, R_3, R_4 となる。この骨組では、全ての部材が自由に剛体回転できるわけではない。ここには 2 つの制限があり、そのため独立部材角は 2 つとなり、従属部材角は残りの 2 つとなる。このような骨組では、各部材の依存関係は簡単に決められず、一般的には**直角変位図**を利用して求める。ただし、ここでは以下のように異なった手法を用いる。

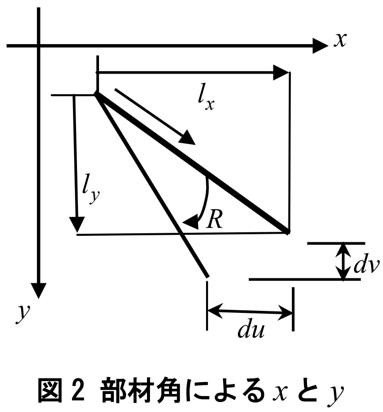


図 2 部材角による x と y 方向の微小変位

任意に部材を回転させるとき、図 1 のループ（閉曲線）上を時計回りに、各部材の部材角によって生じる節点変位を x 方向と y 方向に分けて順次和をとると、最後にはゼロとなる。つまり、2 つの制約条件が生じる。

部材角は微小変形で、部材先端の変位は、図 2 に示す微小な正方向（時計回り）の回転角 R によって、変位 du, dv が各々次のように得られる。

$$du = -Rl_y; \quad dv = Rl_x \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、変位 du, dv はベクトルであり、方向を持つ。また、部材角も時

計回りが正方向であり、部材の方向成分l_x, l_yも始点から終点に向かうベクトルとする。

例として、先の２つの制約条件を求めてみよう。図１に示す骨組を用いて、部材回転角によるx, y方向の変位の条件は、

$$\left.\begin{aligned}&1）\ x\text{方向の変位：}\ h_1R_1 + h_2R_2 - h_2R_3 - h_1R_4 = 0\\ &2）\ y\text{方向の変位：}\ R_2 l/2 + R_3 l/2 = 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

上式から分かるように、部材の始点から終点に向かって、部材の y 方向成分が正の場合、x方向変位duは負となり、成分が負の場合、変位は正となる。同じく部材のx方向成分が正の場合、y方向変位dvは正となり、成分が負の場合、変位は負となる。式(2)を行列を用いて表現すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & -h_2 & -h_1 \\ 0 & l/2 & l/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式の制限条件式で、独立部材角として両柱のそれを選択する。両柱の部材角を右辺項に移項し、整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4)$$

次に、独立部材角を各々１とした際の従属部材角の値を求める。例えば、R_1, R_4を$1,0$とした場合、従属部材角は以下のようになる(図 3(a))。

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5)$$

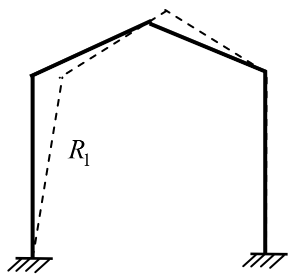
また、R_1, R_4を$0,1$ とした場合は、同様の計算で、図 3(b)のように

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{h_1}{2h_2} \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(6)$$

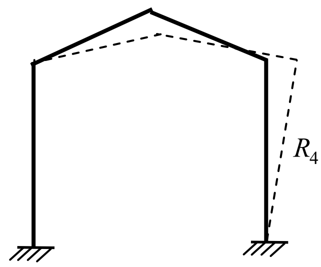
となる。式(5)と(6)をまとめると、部材角間の依存関係が確立する。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{h_1}{2h_2} & \dfrac{h_1}{2h_2} \\ \dfrac{h_1}{2h_2} & -\dfrac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1' \\ R_4' \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで、R_1', R_2'は独立部材角を意味する。以降は、次回お話しする。



(a) 独立部材角$R_1 = 1$の場合



(b) 独立部材角$R_4 = 1$の場合

図 3 独立部材角と従属部材角の関係