基礎８０話 No.2　剛比を用いた両端固定支持門型ラーメンの解析

付 18 話参照
Ex80_1; ex80_2

今回は、変数変換した基本式を用いて、骨組の応力解析を行う。既に、変数変換についてはお話しした。以下にまとめを再度表示する。

R40：たわみ角法の基本式その 2

標準剛度 $K_0 = 2EI_0 / l_0$ を用いて、たわみ角法の基本式を変換する。パラメータ k は剛比という。

パラメータ変換

$$k = \frac{K}{K_0}; \quad K = \frac{2EI}{l}$$

$$\varphi_i = \theta_i K_0; \quad \psi = -3RK_0$$

両端剛接合

$$M_{ij} = k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij}$$

$$M_{ji} = k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji}$$

一端ピン・他端剛接合

$$M_{ij} = 0$$

$$M_{ji} = k(1.5\varphi_j + 0.5\psi) + C_{ji} + C_{ij} / 2$$

2) 両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　ex80_1

新しく誘導したたわみ角法の基本式を用いて、前回お話した両端固定支持の門型ラーメンに、柱頭水平荷重が加わるモデルを応力解析する。図 7(a)には骨組モデルと部材の剛比が示されている。ここでは、標準部材を②部材として、標準剛度 K_0 を次式とする。

$$K_0 = \frac{2EI_b}{l} \qquad \cdots\cdots(12)$$

ここで、I_b, I_c は、各々梁と柱の断面二次モーメントであり、柱の剛比 k_c は 2 とする。すなわち、柱の断面二次モーメントは次式で与えられる。

$$k_c = \frac{2EI_c / h}{K_0} = 2; \quad I_c = 2\frac{h}{l} I_b \qquad \cdots\cdots(13)$$

逆対称条件及び固定支持の境界条件を考慮すると、たわみ角法の基本式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12} = 2(\varphi_2 + \psi); \quad M_{21} = 2(2\varphi_2 + \psi) \leftarrow \quad \varphi_1 = 0 \\ &M_{23} = 1(3\varphi_2); \quad M_{32} = M_{23} \leftarrow \quad \varphi_2 = \varphi_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(14)$$

節点 2 でのモーメントの釣合と、層モーメントの釣合は

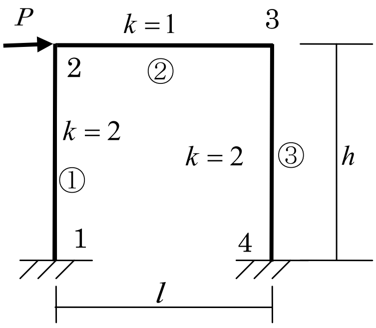
$$\left.\begin{aligned} &M_{21} + M_{23} = 0 \rightarrow \quad 2(2\varphi_2 + \psi) + 3\varphi_2 = 0 \\ &(M_{12} + M_{21}) = -Ph/2 \quad 2(\varphi_2 + \psi) + 2(2\varphi_2 + \psi) = -Ph/2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(15a)$$

として与えられる。上式下を 3 で割り整理すると、骨組全体の釣合式が得られる。

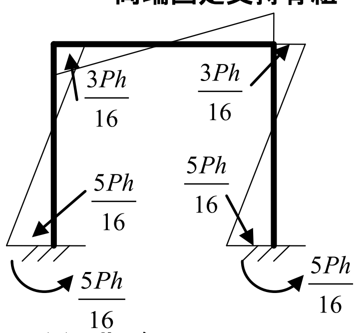
$$\left.\begin{aligned} &7\varphi_2 + 2\psi = 0 \\ &2\varphi_2 + \frac{4}{3}\psi = -\frac{Ph}{6} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{Ph}{6} \end{Bmatrix} \right\} \cdots\cdots(15b)$$

上の連立方程式を解くと、回転角と部材角は

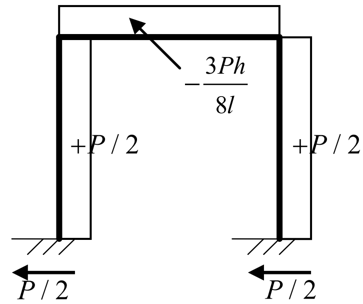
$$\varphi_2 = \frac{Ph}{16}; \quad \psi = \frac{-7}{32} Ph \qquad \cdots\cdots(16)$$



(a) 柱頭水平荷重を受ける両端固定支持骨組



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

図 7 柱頭水平荷重の両端固定の骨組

となるが、実際の変位は標準剛度を用いると次式となる。

$$\theta_2=\frac{\varphi_2}{K_0}=\frac{Ph}{16}\cdot\frac{l}{2EI_b}=\frac{Phl}{32EI_b};R=-\frac{\psi}{3K_0}=\frac{7Ph}{3\cdot 32}\cdot\frac{l}{2EI_b}=\frac{7Phl}{192EI_b}\quad\cdot\cdot(17)$$

次に、部材の材端モーメントは、変位の式(16)を式(14)に代入すると、次式となる。

$$\left.\begin{aligned}&M_{12}=2(\varphi_2+\psi)=2(\frac{1}{16}-\frac{7}{32})Ph=-\frac{5}{16}Ph;\quad M_{21}=2(2\varphi_2+\psi)\\&=2(\frac{2}{16}-\frac{7}{32})Ph=-\frac{3}{16}Ph;\quad M_{23}=3\frac{Ph}{16}=\frac{3}{16}Ph=M_{32}\end{aligned}\right\}\cdot\cdot(18)$$

得られた材端モーメントを利用して、曲げモーメント図を図 7(b)のように描く。また、曲げモーメント図より、せん断力図を、続いて軸力図と反力を求める。また、外力と反力の釣合を検証する。これらは読者の演習とする。

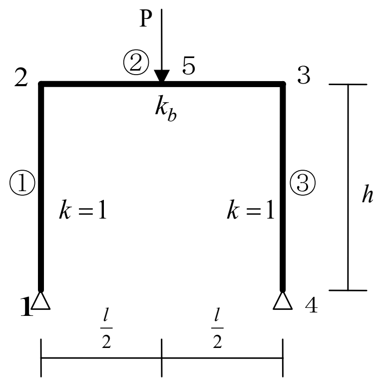


図 8 梁中央集中荷重の両端ピン支持の骨組

3）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央鉛直方向集中荷重　ex80_2

このモデルは対称形状で対称荷重であり、対称応力・対称変形状態となる。部材 2 の部材荷重による基本応力は次式で与えられる。

$$C=\frac{Pl}{8};\quad M_0=\frac{Pl}{4};\quad Q=\frac{P}{2}\quad\cdots\cdots(19)$$

ピン支持境界と対称条件を考慮して、部材の材端モーメントを求める。

$$\left.\begin{aligned}&M_{12}=0;M_{21}=1(1.5\varphi_2)\leftarrow\quad\psi=0\\&M_{23}=k_b(\varphi_2)-C;\quad M_{32}=-M_{23}\leftarrow\quad\varphi_2=-\varphi_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

ここで、固定端モーメントの符号は、中間荷重のある部材の反力で、モーメント方向の正負を決めれば良い。

釣合式は、節点 2 でのモーメントの釣合より、

$$M_{21}+M_{23}=0\to 1.5\varphi_2+k_b\varphi_2-C=0\to(1.5+k_b)\varphi_2=C\quad\cdots\cdots(21)$$

となり、上式を解くと、回転角 φ_2 が得られる。

$$\varphi_2=\frac{C}{(k_b+1.5)}\quad\cdots\cdots(22)$$

得られた回転角 φ_2 を式(20)の基本式に代入すると、次のように材端モーメントが得られる。

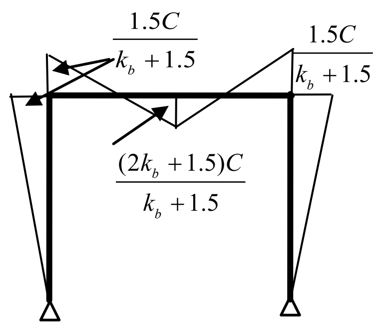
$$M_{21}=1.5\varphi_2=\frac{1.5C}{k_b+1.5};\quad M_{23}=k_b\varphi_2+C=k_b\left(\frac{C}{k_b+1.5}\right)-C=\frac{-1.5C}{k_b+1.5}\quad\cdots\cdots(23)$$

また、梁中央の曲げモーメントは、次のように求められる。

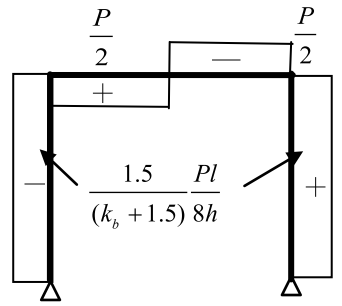
$$M_c=M_0-0.5(M_{32}-M_{23})=2C-\frac{1.5C}{k_b+1.5}=\frac{(2k_b+1.5)C}{k_b+1.5}\quad\cdots\cdots(24)$$

曲げモーメント図、せん断力図、軸力図が図 9 に示される。

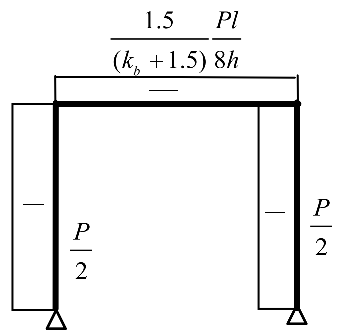
以上の解析手順から、変数変換したたわみ角法は、手計算では圧倒的に便利であることが分かる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 9 梁中央集中荷重の両端ピン支持骨組の断面力図