基礎７９話 No.1　両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重

付 18 話参照
ex79_1~ ex79_3

門型ラーメンに非対称荷重が加わると、骨組はスウェイし、節点移動を生じる。今回は、図 1 に示す骨組を用いて、節点移動のある場合の解析手順を学ぶ。

1) 両端固定支持門型ラーメン＋柱頭水平荷重　ex79_1

骨組は部材数 3、節点数 4 で構成され、節点 2 の柱頭に水平荷重 P が作用する。この骨組は、対称骨組で荷重が逆対称であるため、図中の中央線を軸に逆対称変形となる。従って、逆対称条件を用いて骨組の半分を応力解析すれば良い。まず、固定境界 $\theta_1 = 0$ と逆対称条件 $\theta_2 = \theta_3$ を考慮して、部材①と②の基本式を以下に示す。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12} = \frac{2EI_c}{h}(\theta_2 - 3R_{\mathrm{I}});\quad M_{21} = \frac{2EI_c}{h}(2\theta_2 - 3R_{\mathrm{I}}) \\ &M_{23} = \frac{2EI_b}{l}(2\theta_2 + \theta_3) = \frac{2EI_b}{l}3\theta_2;\quad M_{32} = M_{23} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

この骨組の自由度は、上式から分かるように、θ_2 と R_{I} の 2 つであり、従って、2 つの釣合式が必要となる。

まず、節点におけるモーメントの釣合を考えよう。節点 2 におけるモーメントの釣合式は

$$M_{21} + M_{23} = 0 \to \frac{2EI_c}{h}(2\theta_2 - 3R_{\mathrm{I}}) + \frac{2EI_b}{l}3\theta_2 = 0 \to$$

$$(2K_c + 3K_b)\theta_2 - 3K_c R_{\mathrm{I}} = 0 \leftarrow K_c = \frac{2EI_c}{h}; K_b = \frac{2EI_b}{l} \qquad \cdots\cdots(2)$$

であり、次に、層モーメントの釣合は逆対称であることを考慮して、一本の柱のせん断力を使用すると

$$M_{12} + M_{21} = -\frac{Ph}{2} \to \frac{2EI_c}{h}(\theta_2 - 3R_{\mathrm{I}}) + \frac{2EI_c}{h}(2\theta_2 - 3R_{\mathrm{I}}) = -\frac{Ph}{2} \to$$

$$3K_c\theta_2 - 6K_c R_{\mathrm{I}} = -\frac{Ph}{2} \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式の両辺に−1 をかけ、式(2)と共に行列表記すると

$$\begin{bmatrix} 2K_c + 3K_b & -3K_c \\ -3K_c & 6K_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ R_{\mathrm{I}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Ph/2 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4)$$

上記の全体釣合式が得られる。上式から分かるように、左辺の係数行列は対称であり、このようにたわみ角法の係数行列は、常に対称行列となる。この係数行列は一般に**剛性行列**と呼ばれる。

上の連立方程式を解くことによって回転角 θ_2 と部材角 R_{I} が、次のように得られる。

$$\theta_2 = \frac{Ph}{2(K_c + 6K_b)};\quad R_{\mathrm{I}} = \frac{2K_c + 3K_b}{6K_c(K_c + 6K_b)}Ph \qquad \cdots\cdots(5)$$

次に、各部材の応力を求めよう。釣合式を解いて得た回転角 θ_2 と部材角 R_{I} をたわみ角法の基本式(1)に代入すると、各部材の材端モーメント

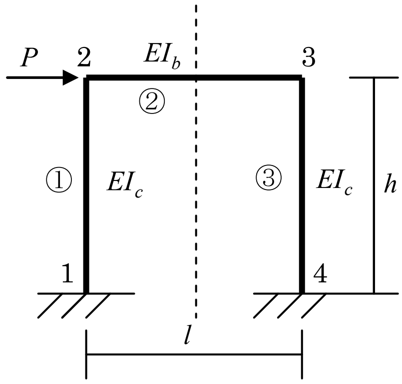

図 1 両端固定支持で柱頭に水平荷重が加わる門型ラーメン

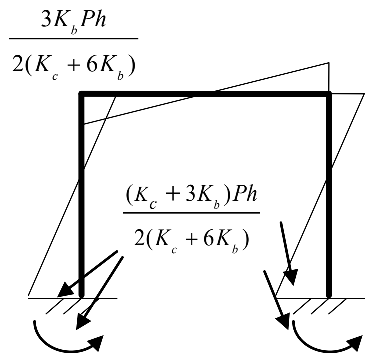

図 2 曲げモーメント図

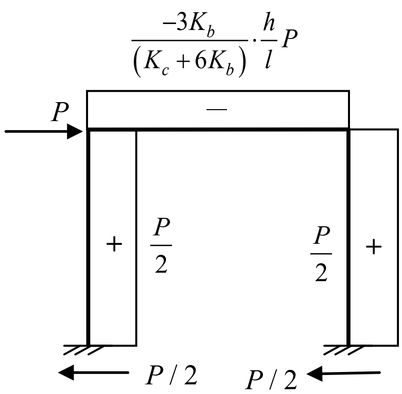

図 3 せん断力図

が以下のように得られる。

$$
\left.\begin{aligned}
M_{12} &= K_c\left(\frac{1}{2(K_c+6K_b)}-\frac{2K_c+3K_b}{2K_c(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{K_c-2K_c-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph\\
M_{21} &= K_c\left(\frac{2}{2(K_c+6K_b)}-\frac{2K_c+3K_b}{2K_c(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph\\
M_{23} &= K_b\left(\frac{3}{2(K_c+6K_b)}\right)Ph=\frac{3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)
$$

上記の材端モーメントを用いて、節点 2 のモーメントの釣合が得られていることを確認しよう。また、材端モーメントを用いて、各部材の応力を求め、その応力から曲げモーメント図を図 2 のように描く。さらに、曲げモーメント図を利用して各部材のせん断力を求める。その際、部材①のせん断力と外力との釣合を確認する。

$$
\left.\begin{aligned}
Q_c &= -\frac{(M_{12}+M_{21})}{h}=\frac{3K_b+(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)h}Ph=\frac{P}{2}\\
Q_b &= -\frac{2M_{23}}{l}=\frac{-3K_b}{(K_c+6K_b)}\cdot\frac{h}{l}P
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)
$$

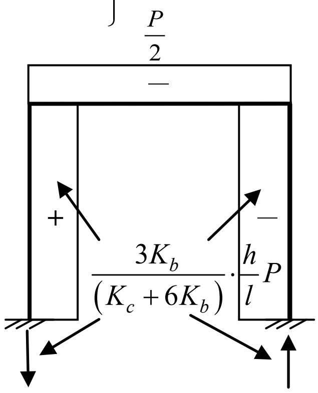

図 4 軸力図

各部材のせん断力から、骨組全体のせん断力図を図 3 に示す。次に、せん断力図を利用し、節点での力の釣合から各部材の軸力を求める。軸力図は図 4 に示される。

曲げモーメント図、せん断力図及び軸力図から支持点の反力を求める。これらの断面力図には反力が示されており、同図より分かるように上下方向の釣合と水平方向の力の釣合が得られている。次に、モーメントの釣合を検討しよう。ここでは、節点 1 におけるモーメントが求められ、釣合が以下のように成立していることが分かる。

$$
M_1=Ph-2\frac{(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph-\frac{3K_b}{(K_c+6K_b)}\cdot\frac{h}{l}Pl\to 0 \qquad \cdots\cdots(8)
$$

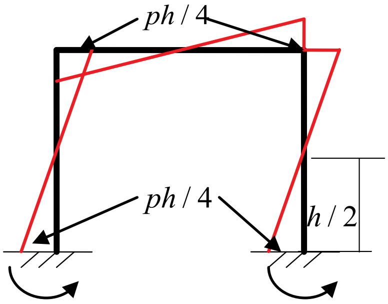

図 5 曲げモーメント図

（$\alpha=K_b/K_c\to\infty$）

最後に、荷重点の水平方向変位を求めてみよう。水平方向変位δは、柱の部材角と階高をかけることで以下のように得られる。

$$
\delta=R_1h=\frac{2K_c+3K_b}{6K_c(K_c+6K_b)}\cdot Ph^2 \qquad \cdots\cdots(9)
$$

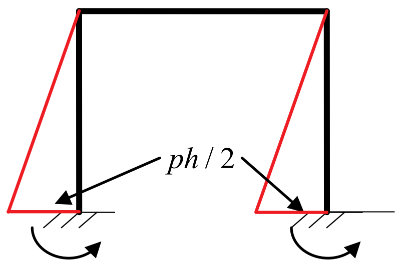

図 6 曲げモーメント図

（$\alpha=K_b/K_c\to 0$）

ここで、$\alpha=K_b/K_c$とし、梁と柱の曲げ剛性比が極端な場合について考えてみよう。まず、$\alpha=K_b/K_c\to\infty$の場合、梁の剛性が極端に大きい場合で、柱の両端は固定支持と同じとなり、反曲点は$h/2$となる。

$$
M_{12}=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(1/\alpha+3)}{2(1/\alpha+6)}Ph=\to-\frac{Ph}{4};\quad M_{21}=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-3Ph}{2(1/\alpha+6)}\to-\frac{Ph}{4} \qquad \cdots(10)
$$

逆に、$\alpha=K_b/K_c\to 0$の場合、梁の剛性が極端に小さい場合で、柱の上端はピン支持となる。

$$
M_{12}=\frac{-(K_c+3K_b)}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-(1+3\alpha)}{2(1+6\alpha)}Ph=\to-\frac{Ph}{2};\quad M_{21}=\frac{-3K_b}{2(K_c+6K_b)}Ph=\frac{-3\alpha Ph}{2(1+6\alpha)}\to 0 \qquad \cdots\cdots(11)
$$