基礎７７話 No.5 両端ピン支持の門型ラーメン＋梁中央集中荷重

付 16 話参照
ex68_1

今回は、図20に示す梁中央に集中荷重を受ける両端ピン支持門型ラーメンの応力解析を行う。

5）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重　ex68_1

この構造は既に梁の微分方程式を用いて応力解析し、断面力分布を求めた。結果を得る過程が複雑で、結構面倒であることに気付いたであろう。さらに複雑な構造では、とてもこの種の方法では解析できない。そこで、このたわみ角法が威力を発揮する。

この構造は、対称構造で対称荷重であるため、対称の応力状態・変形状態となる。このことを考慮して、たわみ角法により断面力分布を求めてみよう。対称変形では半分の骨組を解析すれば良い。まず、部材①と②の基本式を以下に示す。柱の材端はピン支持で、対称変形であるため部材角はない。さらに部材荷重もない。梁は部材荷重の中央集中荷重があり、また部材角は生じない。これらを考慮した材端モーメントは、

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{2EI_c}{h}(1.5\theta_2) \\ &M_{23}=\frac{2EI_b}{l}(2\theta_2+\theta_3)-C;\quad M_{32}=\frac{2EI_b}{l}(2\theta_3+\theta_2)+C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(44)$$

となる。このモデルは対称変形となるため $\theta_2=-\theta_3$ の条件が用いられる。この条件を梁の基本式に適用すると、次の材端モーメントが得られる。

$$M_{23}=\frac{2EI_b}{l}\theta_2-C;\quad M_{32}=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2+C=-M_{23}\qquad\cdots\cdots(45)$$

上記の材端モーメントでは、未知変数は回転角 θ_2 のみであり、節点 2 におけるモーメントの釣合を用いると、次の釣合式が得られる。

$$M_{21}+M_{23}=0\rightarrow\frac{2EI_c}{h}(1.5\theta_2)+\frac{2EI_b}{l}(\theta_2)-C=0\rightarrow\qquad\cdots\cdots(46)$$

$$\left(\frac{3EI_c}{h}+\frac{2EI_b}{l}\right)\theta_2=C\qquad\cdots\cdots(47)$$

上式における基本応力は、中央集中荷重であることから、

$$C=\frac{Pl}{8};\quad M_0=\frac{Pl}{4}=2C;\quad Q=\frac{P}{2}\qquad\cdots\cdots(48)$$

であり、また、曲げ剛性を以下のように表すと、釣合式は、

$$\frac{2EI_c}{h}=K_c;\quad\frac{2EI_b}{l}=K_b\rightarrow(1.5K_c+K_b)\theta_2=C\qquad\cdots\cdots(49)$$

となる。上式を解くと、回転角 θ_2 が次のように得られる。

$$\theta_2=\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}\qquad\cdots\cdots(50)$$

次に、各部材の応力を求めよう。釣合式を解いて得た回転角 θ_2 を基本

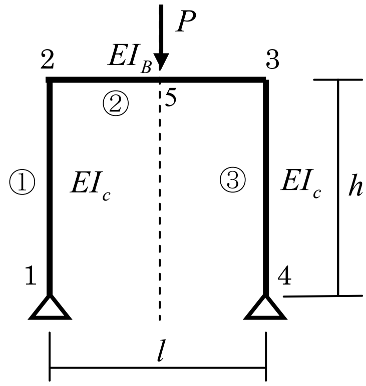
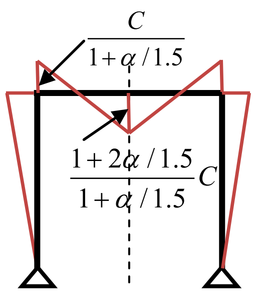
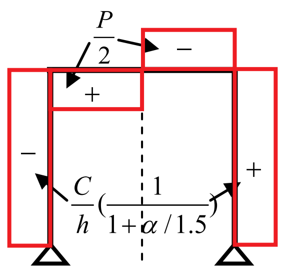


図 20 両端ピン支持＋梁中央集中荷重の門型ラーメン



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

式に代入すると、各部材の材端モーメントが以下のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=K_c\left(1.5\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}\right)=\frac{C}{1+\alpha/1.5} \\ &M_{23}=K_b\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}-C=\frac{K_bC}{(1.5K_c+K_b)}-\frac{1.5K_c+K_b}{(1.5K_c+K_b)}C=\frac{-C}{1+\alpha/1.5} \end{aligned}\right\}\cdots(51)$$

ただし、パラメータ α は梁と柱の曲げ剛性比を表す。

$$\alpha=\frac{K_b}{K_c}=\frac{EI_b/l}{EI_c/h} \qquad \cdots\cdots(52)$$

梁中央の曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$M_c=M_0-(M_{32}-M_{23})/2=2C-\frac{C}{1+\alpha/1.5}=\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C \qquad \cdots\cdots(53)$$

次に、曲げモーメント図を利用して、梁と柱のせん断力を求める。まず、梁のせん断力は、

$$Q_{bL}=2(M_c-M_{23})/l=\frac{2C}{l}\left(\frac{1+3\alpha}{1+\alpha/1.5}+\frac{1}{1+\alpha/1.5}\right)=\frac{4}{l}\frac{Pl}{8}=\frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(54)$$

となり、柱のせん断力は次式となる。

$$Q_c=(-M_{21})/h=\frac{-C}{h}\left(\frac{1}{1+\alpha/1.5}\right)=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5} \qquad \cdots\cdots(55)$$

図 22 を参考にすると、軸力は節点 2 におけるせん断力と軸力の釣合より、次のようになる。

$$N_c=\frac{-P}{2};\quad N_b=\frac{-C}{h}\left(\frac{1}{1+\alpha/1.5}\right)=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5} \qquad \cdots\cdots(56)$$

得られた断面力より、各断面力図を図 21 のように描く。

梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に大きい場合、つまり $\alpha=K_b/K_c\to\infty$ の場合、各節点の断面力は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{C}{1+\alpha/1.5}\to 0 \\ &M_{23}=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}\to 0;\quad M_c=\frac{1/\alpha+2/1.5}{1/\alpha+1/1.5}C=2C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(57)$$

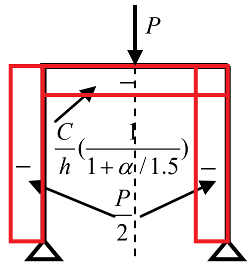
上記の場合、図 23(a)のように梁は両端ピン支持状態の断面力となり、柱のせん断力はゼロとなり、軸力のみ生じる。

逆に、梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に小さい場合(同図(b))、つまり $\alpha=K_b/K_c\to 0$ の場合、各節点の断面力は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &M_{12}=0;\quad M_{21}=\frac{C}{1+\alpha/1.5}\to C \\ &M_{23}=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}\to -C;\quad M_c=\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C\to C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(58)$$

ここでは、梁は両端固定支持状態の断面力となる。

両極端の状況より、梁の曲げ剛性が柱より圧倒的に大きいと材端モーメントはゼロとなり、柱の曲げ剛性が大きくなるに従って、梁材端の拘束が徐々に向上し、梁の材端モーメントが吊り上がることが分かる。



(c) 軸力図

図 21 門型ラーメン断面力図

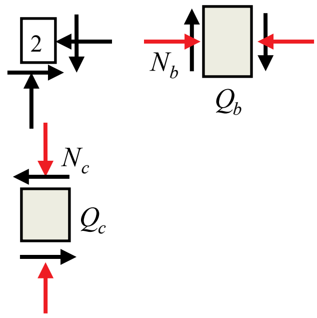
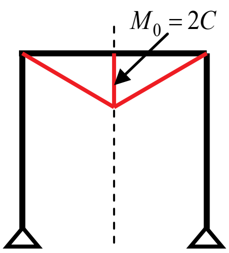
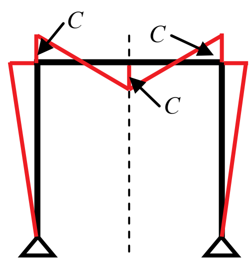


図 22 節点 2 での力の釣合



(a) $\alpha=K_b/K_c\to\infty$

(梁の曲げ剛性が柱に比べて極端に大きい)



(b) $\alpha=K_b/K_c\to 0$

(梁の曲げ剛性が柱に比べて極端に小さい)

図 23 極端な状態での曲げモーメント図