基礎７０話 No.2　部材荷重や境界のある場合の基本式、変数変換による基本式

前回に続いて、たわみ角法の基本式を誘導する。ここでは、部材に直接荷重が載荷される場合を考えてみよう。図 3 のように部材に中間荷重がある場合（部材荷重）、まず、両端固定として断面力と変形状態を求める。次に両端固定として求めた反力と釣合う、つまり、反力とは逆方向の外力を両端の材端モーメントとして、たわみ角法の基本式に加える。これを**固定端モーメント**あるいは固定端外力と呼ぶ。

この固定端モーメントを左辺に加えると、図 3 を参考に、たわみ角法の釣合式は以下のようになる。

$$M_{ij}+C_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R);\quad M_{ji}-C_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R) \qquad \cdots(16)$$

固定端モーメントを移項して、材端モーメントを書き直すと次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}\\ M_{ji}&=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3R)+C_{ji}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

これで、たわみ角法の完全な形の基本式が得られたことになる。

部材荷重のある場合の梁内部の断面力と変形は、当然材端モーメントによって生じる断面力と変位に、図 4 に示される両端固定として求めた断面力と変形を加えて得られる。ここで、$\bar{M}_{ij},\bar{M}_{ji}$ は、式(16)中の固定端モーメントを除いた変位によって生じる材端モーメントを示す。この両端固定として求めた断面力を**基本応力**と呼ぶ。

一端に境界を有する部材に適用可能とするため、たわみ角法の基本式を拡張する。境界条件は一端ピンの場合と一端固定の場合についてであり、この 2 種の境界条件を用いて基本式を変更する。まず、一端ピンについて考えてみよう。式(17)で i 端がピンの場合、i 端の曲げモーメントはゼロとなるため、次のように材端モーメント M_{ij} はゼロとなる。式(17)上を θ_i について整理すると、下式右となる。

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3R)-C_{ij}=0\rightarrow\quad \theta_i=\frac{1}{2}(-\theta_j+3R+\frac{lC_{ij}}{2EI}) \qquad \cdots(18)$$

上式を式(17)下に代入すると次式が得られる。

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\frac{1}{2}(-\theta_j+3R+\frac{lC_{ij}}{2EI})-3R)+C_{ji}\rightarrow$$
$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}(1.5\theta_j-1.5R)+\bar{C}_{ji}\quad\leftarrow\bar{C}_{ij}=C_{ji}+0.5C_{ij} \qquad \cdots\cdots(19)$$

以上のように、i 端ピンの場合の基本式は、

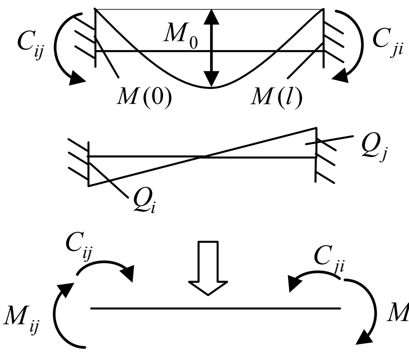

図 3 中間荷重がある場合

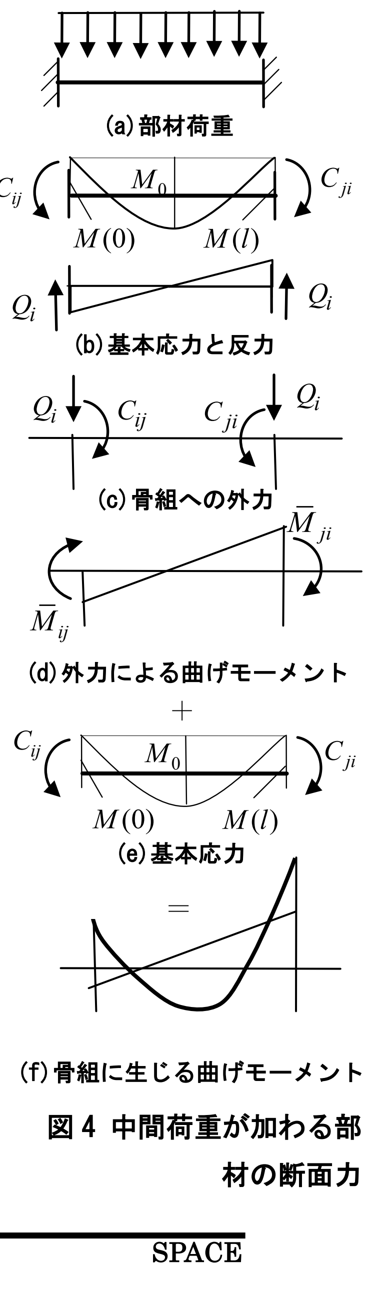

図 4 中間荷重が加わる部材の断面力

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(1.5\theta_j - 1.5R) + \bar{C}_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(20)$$

続いて、一端固定で他端剛接合の場合について考える。式(17)で i 端が固定の場合、i 端の回転角 θ_i はゼロとなるため、基本式は以下となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(\theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j - 3R) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(21)$$

次に、新しいパラメータを導入して、上記の式(17)と(20)、(21)を変換する。骨組の中で代表的な部材を一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次式で定義する。

$$K_0 = \frac{2EI_0}{l_0} \qquad \cdots\cdots(22)$$

このパラメータ K_0 を**標準剛度**と呼ぶ。たわみ角法の基本式(17)の右辺に K_0 / K_0 を掛け、整理すると、

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI/l}{K_0}(2\theta_i K_0 + \theta_j K_0 - 3RK_0) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI/l}{K_0}(2\theta_j K_0 + \theta_i K_0 - 3RK_0) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(23)$$

θ_i と R_k は回転量を表し、無次元量である。しかし、φ_i と ψ_k は K_0 と同じ次元を持つ。つまり、モーメントと同じ次元を持つことに注意されたい。

となる。ここで、次のような新しいパラメータと変位を定義する。

$$k = \frac{K}{K_0};\quad K = \frac{2EI}{l};\quad \varphi_i = \theta_i K_0;\quad \psi = -3RK_0 \qquad \cdots\cdots(24)$$

特に、新しいパラメータとして定義した k は**剛比**と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対するその部材の曲げ剛性の比を表す。上のパラメータを使用すると、たわみ角法の基本式は次のように変換される。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(25)$$

式(20)の i 端ピン接合で j 端剛接合の基本式は、次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= k(1.5\varphi_j + 0.5\psi) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(26)$$

同様に式(21)の一端固定で他端剛接合の基本式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= k(\varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \psi) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(27)$$

最後に、一端ピンで他端固定の場合の固定端モーメントについて考える。両端固定支持から一端ピン状態となると、図 5 のように固定端モーメントも固定端せん断力も次のように変化する。詳しくは、例題を通して学ぶことにする。

$$\bar{C}_{ji} = C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij};\quad \bar{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1.5C_{ij}}{l};\quad \bar{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1.5C_{ij}}{l} \qquad \cdots(28)$$

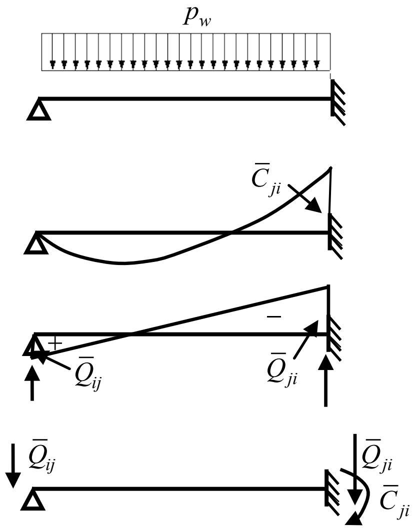

図 5 一端ピン支持梁の固定端モーメント、固定端せん断力と外力