基礎６９話 No.1　たわみ角法の基本式誘導

今回から、これまでの応力解析と比較して、抜群の威力を発揮するたわみ角法について学ぶ。まず、たわみ角法の基本式を梁の微分方程式から導く。ここでは図 1(a)のように梁の両端に材端モーメント M_{ij}, M_{ji} が加わり、部材の両端に回転角 θ_i, θ_j が生じる場合について考える。最初、部材に直接加わる荷重は考慮しない。

部材内部に生じる曲げモーメントを $M(x)$ とする。材に中間荷重（部材荷重）がないので曲げモーメント分布は直線となり、関数 $M(x)$ は、次の一次式で表すことができる。

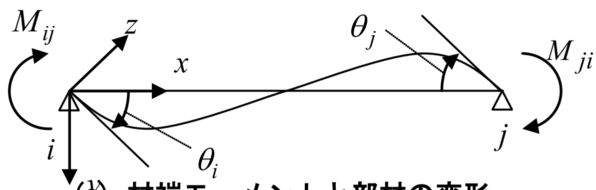
$$M(x) = a + bx \qquad \cdots\cdots(1)$$

材端に加わる荷重と曲げモーメントの釣合より、同図(c)のように両端で次式が成立する。

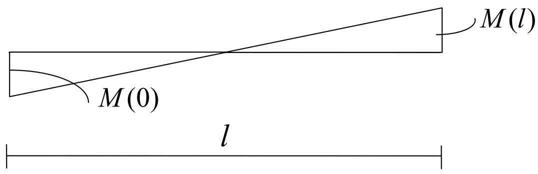
$$M_{ij} - M(0) = 0; \quad M_{ji} + M(l) = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

式(1)に上式を適用することで、未定定数 a, b は

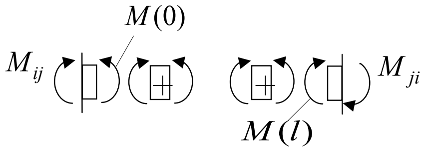
$$a = M_{ij}; \quad b = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} \qquad \cdots\cdots(3)$$



(a) 材端モーメントと部材の変形



(b) 部材内の曲げモーメント図



(c) 材端力と曲げモーメントとの釣合

図 1 部材の構成と断面力

となり、従って、曲げモーメント $M(x)$ は、両端の材端モーメントより、次式で表される。

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(4)$$

梁の曲げモーメント分布が決まったところで、次は、梁の微分方程式に代入し、梁のたわみを求めることにしよう。梁の微分方程式に上式の曲げモーメントを代入すると、

$$EI\frac{dv^2}{dx^2} = -M(x) = -M_{ij} + \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで、l は部材の長さ、E はヤング係数、I は断面二次モーメントであり、$v(x)$ はたわみを表す関数である。梁の微分方程式を解くために、上式の両辺を 2 回積分すると、次のように

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} &= EI\theta(x) = -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 \\ EIv(x) &= -\frac{M_{ij}x^2}{2} + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

たわみの一般解が得られる。ここで、C_1, C_2 は積分定数である。

たわみ角法基本式の誘導は少し面倒ではあるが、ゆっくりと式を追っていけばそれほど難しくはない。是非、式を誘導し、理解してほしい。得られた結果は非常に単純であることが分かる。

次に、上式にたわみの境界条件を用いて積分定数 C_1, C_2 を決定する。
境界条件は、図 2 を参考に両端の法線方向変位より

$$v(0) = v_i; \quad v(l) = v_j \qquad \cdots\cdots(7)$$

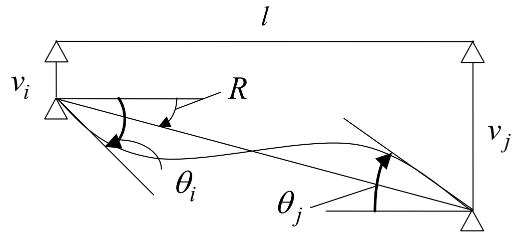


図 2 部材角と両端変位の関係

であり、従って、式(6)下より

$$\left.\begin{aligned} EIv(0) &= C_2 = EIv_i \\ EIv(l) &= -\frac{M_{ij}}{2}l^2 + \frac{l^2}{6}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 l + C_2 = EIv_j \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

となる。上式から C_1 を求めると、

$$C_1 = \frac{EI}{l}v_j + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) - \frac{C_2}{l} = EI(\frac{v_j - v_i}{l}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) = EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。ここでは、部材角 R を定義して用いている。

$$R = \frac{v_j - v_i}{l} \qquad \cdots\cdots(10)$$

得られた積分定数 C_1, C_2 を式(6)下に代入し、たわみ関数 $v(x)$ を求める。

$$EIv(x) = -\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + \{EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\}x + EIv_i \rightarrow$$

$$v(x) = v_i + Rx + \frac{1}{EI}\{-\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})x\} \qquad \cdots(11)$$

また、回転角 $\theta(x)$ は、上式を微分することで以下のように得られる。

$$EI\theta(x) = -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + \{EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\} \rightarrow$$

$$\theta(x) = R + \frac{1}{EI}\{-M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

次に上式を用いて、部材両端の回転角 θ_i, θ_j と材端モーメント M_{ij}, M_{ji} の関係を求める。まず、上式に i 端と j 端の位置を代入し、境界として与えられる両端の回転角と等しいと置くと、下式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_i = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji}) \\ \theta(l) &= \theta_j = R + \frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}l + \frac{l}{2}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\right\} = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(13)$$

上式を整理すると、

$$\theta_i = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji}); \quad \theta_j = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij}) \qquad \cdots\cdots(14)$$

となり、また、M_{ij} と M_{ji} について求め直すと、次のように

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(15)$$

節点移動がある場合のたわみ角法の基本式が得られる。得られた結果は、曲げ剛性 $2EI/l$ に、係数「2，1、－3」と非常に単純であり、覚え易い。
まずは、この係数を覚えよう。以降は次回お話しする。