基礎６８話 No.4　両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重

付 16 話参照
ex68_1 ~ ex68_3

今回は、図16に示す両端ピン支持門型ラーメンで梁中央に鉛直方向集中荷重のモデルである。対称構造で対称荷重であるため、対称の応力・変形状態となる。このことを考慮して梁の微分方程式を用い、断面力分布を求める。つまり、対称変形では半分の骨組を解析する。

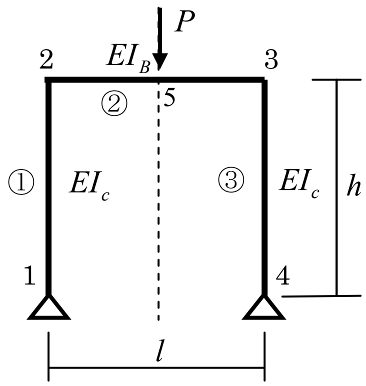


図 16 梁中央集中荷重の門型ラーメン

4）両端ピン支持門型ラーメン＋梁中央集中荷重　ex68_1

対称変形では、回転角 θ_2 と θ_3 の値が同一で異符号となり、骨組はスウェイ、つまり横移動しない。部材①と②の梁の微分方程式は、共に荷重がないことから次式で表される。

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0$$

上式を解くために、両辺を 4 回積分する。ここでは、たわみ関数と回転角関数を示す。部材①では節点 1 を、部材②では節点 2 を原点とする。

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$
$$EIv(x)=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

まず、境界条件より部材②における梁の積分定数を求める。ここでは梁の変位を v_2 とする。境界条件として、部材の伸縮を考慮しないので、梁の材端となる節点2では上下方向に拘束され、また、回転角を θ_2 とする。

$$v_2(0)=0;\quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0}=\theta_2$$

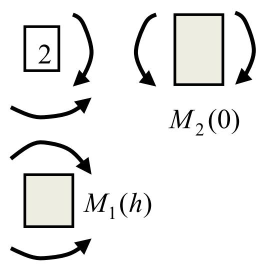


図 17 節点 2 でのモーメントの釣合

上の条件より、積分定数が次のように2つ決まることになる。

$$EI_b\left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0}=C_3=EI_b\theta_2\rightarrow\theta_2=\frac{C_3}{EI_b};\quad EI_bv_2(0)=C_4=0$$

他の境界条件として節点5では、対称変形であることより回転角はゼロとなり、またせん断力と荷重との釣合より次式右が得られる。

$$\left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=l/2}=0;\quad Q(l/2)=\frac{P}{2}$$

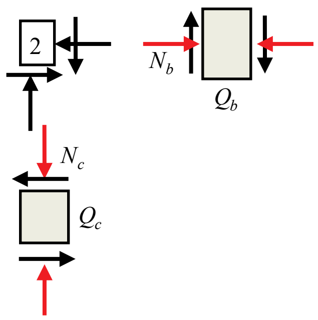


図 18 節点 2 での力の釣合

まず、前者の境界条件と $\theta_2=C_3/EI_b$ より、

$$\frac{C_1}{8}l^2+\frac{C_2}{2}l+C_3=0\rightarrow\frac{1}{4}C_1l^2+C_2l=-2EI_b\theta_2\rightarrow C_2=-\frac{2EI_b\theta_2}{l}-\frac{1}{4}C_1l$$

後者の力の釣合より、

$$-Q(x)=EI_b\frac{dv_2^3}{dx^3}=C_1\rightarrow\quad Q(l/2)=-C_1=\frac{P}{2}\rightarrow C_1=-\frac{P}{2}$$

となり、上の積分定数 C_1 を前者の境界条件に代入すると、C_2 は以下のように求められる。

$$C_2=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{4}C_1l=-\frac{2EI_b}{l}\theta_2+\frac{1}{8}Pl$$

求めた全ての積分定数を用いて、梁のせん断力$Q_2(x)$と曲げモーメント$M_2(x)$を以下のように求める。

$$EI_b\frac{d^2v_2}{dx^2}=-M_2(x)=C_1x+C_2;\quad EI_b\frac{d^3v_2}{dx^3}=-Q_2(x)=C_1\rightarrow$$
$$M_2(x)=-\frac{Px}{2}+\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{8}Pl;\quad Q_2(x)=\frac{P}{2}$$

次に、柱の変位v_1を考える。境界条件として、節点1はピン支持であることから、たわみはゼロ、曲げモーメントもゼロとなる。ここでは積分定数や変位関数を梁と間違わないように下添え字を変更する。

$$EI_c\frac{d^2v_1}{dx^2}=-M_1(x)=C_5x+C_6\rightarrow -M_1(0)=C_6=0$$
$$EI_cv_1(x)=\frac{C_5}{6}x^3+\frac{C_6}{2}x^2+C_7x+C_8\rightarrow EI_cv_1(0)=C_8=0$$

節点2の境界条件は、骨組が横移動しないことより、たわみはゼロとなり、また回転角は梁の回転角と同じθ_2となる。

$$EI_cv_1(h)=\frac{C_5}{6}h^3+C_7h=0\rightarrow\frac{C_5}{6}h^2+C_7=0$$
$$EI_c\frac{dv_1}{dx}\Big|_{x=h}=\frac{C_5}{2}h^2+C_7=EI_c\theta_2$$

上記2つの方程式より、積分定数が以下のように求められる。

$$\frac{C_5}{2}h^2-\frac{C_5}{6}h^2=EI_c\theta_2\rightarrow C_5=\frac{3EI_c\theta_2}{h^2};\quad C_7=-\frac{C_5}{6}h^2=-\frac{EI_c\theta_2}{2}$$

上の積分定数を、$M_1(x)$及び$Q_1(x)$に代入すると次式が得られる。

$$EI_c\frac{d^2v_2}{dx^2}=-M_1(x)=C_5x\rightarrow M_1(x)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}x$$
$$EI_c\frac{d^3v_2}{dx^3}=-Q_1(x)=C_5\rightarrow\quad Q_1(x)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}$$

梁と柱の節点2における曲げモーメントは、次のようになる。

$$M_1(h)=-\frac{3EI_c\theta_2}{h^2}h=-\frac{3EI_c\theta_2}{h}=-1.5K_c\theta_2\leftarrow K_c=\frac{2EI_c}{h}$$
$$M_2(0)=\frac{2EI_b}{l}\theta_2-\frac{1}{8}Pl=K_b\theta_2-C\leftarrow K_b=\frac{2EI_b}{l};C=\frac{1}{8}Pl$$

図17を参考に、節点2でのモーメントの釣合として次式が成立し、θ_2が求められる。ここで、$\alpha=K_b/K_c$とすると、

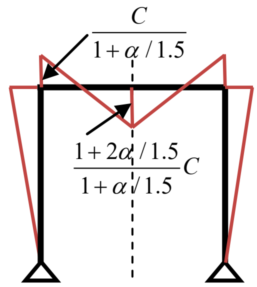
$$-M_1(h)+M_2(0)=1.5K_c\theta_2+K_b\theta_2-C=0\rightarrow\theta_2=\frac{C}{1.5K_c+K_b}$$

梁、柱の材端及び梁中央の曲げモーメントを上の回転角を用いて求める。

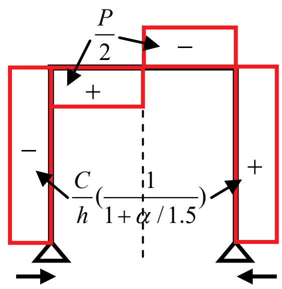
$$M_1(h)=1.5K_c\frac{C}{1.5K_c+K_b}=\frac{C}{1+\alpha/1.5};M_2(0)=K_b\frac{C}{(1.5K_c+K_b)}-C=\frac{-C}{1+\alpha/1.5}$$
$$M_c=M_2(l/2)=-2C-K_b\theta_2+C=(\frac{-K_b}{1.5K_c+K_b}-1)C=(\frac{-\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}-1)C=-\frac{1+2\alpha/1.5}{1+\alpha/1.5}C$$

曲げモーメントのその傾きからせん断力を、節点2のせん断力と軸力の釣合より、軸力を求める。得られた各断面力を図19に示す。

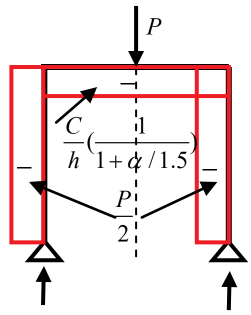
$$Q_c=(-M_{21})/h=\frac{-C}{h}(\frac{1}{1+\alpha/1.5})=\frac{-Pl}{8h}\frac{1}{1+\alpha/1.5};\quad Q_b=\frac{P}{2}$$
$$N_b=-Q_c;\quad N_c=-Q_b$$



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 軸力図

図 19 門型ラーメン断面力図