基礎６７話 No.3　片持ち梁で中央支持＋先端集中荷重

付 16 話参照
ex67_1

今回は、図10に示す片持ち梁の中央に支持がある不静定構造物の応力解析を行い、その解析手順を理解する。つまり、この構造物の曲げモーメントとせん断力を求め、次に変形状態を求めることにする。

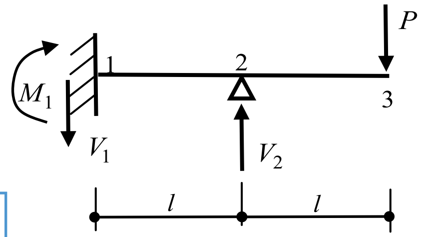


図 10 片持ちで中央に支持のある梁

3）片持ちで中央に支持のある梁＋先端集中荷重　ex67_1

まず、節点2-3間の梁について考える。この部分は片持ち梁であり、断面力は図11に示す基本構造である片持ち梁と同じである。図中の節点2を原点とする座標系を用いると、曲げモーメントと反力は

$$M(x) = -P(l-x);\quad M_2 = -M(0) = Pl$$

となる。従って、この領域における梁の微分方程式は

$$EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = P(l-x)$$

で与えられる。ここで、関数 $v_2(x)$ は節点2-3間の梁の変位を表す。上式を2回積分し、次の境界条件を適用して積分定数を決定する。

$$v_2(0) = 0;\quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0} = \theta_2$$

梁の微分方程式を2回積分すると、

$$EI\frac{dv_2}{dx} = P(lx - \frac{x^2}{2}) + C_1;\quad EIv_2(x) = P(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + C_1x + C_2$$

となり、上の境界条件を適用すると、積分定数は、

$$EIv_2(0) = C_2 = 0;\quad \left.\frac{dv_2}{dx}\right|_{x=0} = \frac{C_1}{EI} = \theta_2 \rightarrow C_1 = EI\theta_2$$

となる。ただし、上式の回転角 θ_2 は、節点1−2 間の梁の影響を受けるので、ここでは値を決定できない。求めた積分定数を用いると、片持ち梁のたわみ関数は、次式となる。

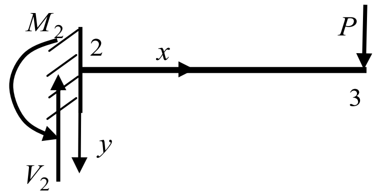
$$v_2(x) = \frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3\right\} + \theta_2 \cdot x$$

次に、節点1-2間の梁について考え、節点1を原点とする座標系を導入する。荷重として、図12に示すように、節点2-3の梁の反力 M_2 とは逆のモーメントが節点2に加わることになる。ただし、梁の中間部に荷重がないことと、不静定梁であることから、梁の微分方程式は、$d^4v_1/dx^4 = 0$ となる。ここで、$v_1(x)$ は節点1−2間の変位を表す。同式を4回積分すると、たわみ関数が次のように得られる。

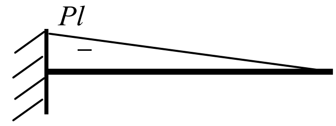
$$EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = -M(x) = C_3x + C_4;\quad EIv_1(x) = \frac{C_3x^3}{6} + \frac{C_4x^2}{2} + C_5x + C_6$$

境界条件として、節点1が固定であることから、

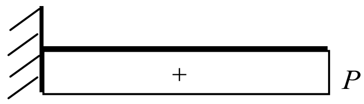
$$EIv_1(0) = C_6 = 0;\quad EI\left.\frac{dv_1}{dx}\right|_{x=0} = C_5 = 0$$



(a) 片持ち梁の座標系と荷重

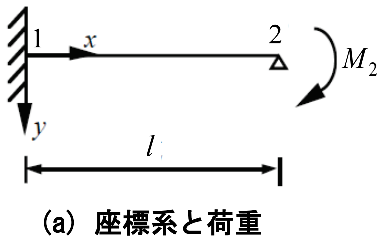


(b) 曲げモーメント図

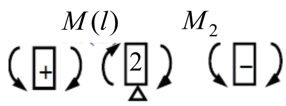


(c) せん断力図

図 11 片持ち梁の断面力図



(a) 座標系と荷重



(b) 節点２でのモーメントの釣合

図 12 片持ち梁の座標系と節点での釣合

また、節点2における境界条件は、ピン支持であることから

$$EIv_1(l)=\frac{C_3 l^3}{6}+\frac{C_4 l^2}{2}=0\rightarrow C_3 l+3C_4=0;\quad EI\left.\frac{dv_1}{dx}\right|_{x=l}=\frac{C_3 l^2}{2}+C_4 l=EI\theta_2$$

となる。ここで、上式の回転角 θ_2 は、節点2-3 間の梁の回転角 θ_2 と同じであり、現時点では未定である。そこで、他の境界条件として、節点2におけるモーメントの釣合を考える。図12(b)に示すように、モーメントの釣合は $M(l)+M_2=0\rightarrow M(l)=-M_2$ で与えられる。この境界条件を用いると、

$$EI\left.\frac{d^2v_1}{dx^2}\right|_{x=l}=-M(l)=M_2\rightarrow C_3 l+C_4=M_2\quad\leftarrow M_2=Pl$$

として、積分定数を決定するための条件式が得られる。以上2つの境界条件より、積分定数 C_3,C_4 が次のように得られる。

$$C_3=\frac{3P}{2};\quad C_4=-\frac{Pl}{2}$$

求めた積分定数を用いるとたわみ関数と回転角関数は次式となり、

$$v_1(x)=\frac{Pl^3}{4EI}\left\{(\frac{x}{l})-1\right\}(\frac{x}{l})^2;\quad \theta_1(x)=\frac{dv_1}{dx}=\frac{Pl^2}{4EI}\left\{3(\frac{x}{l})-2\right\}(\frac{x}{l})$$

回転角 θ_2 は、上式右に $x=l$ を代入することで、$\theta_2=\theta_1(l)=Pl^2/4EI$ として得られる。

次に、曲げモーメントとせん断力は求めた積分定数を代入すると、

$$M(x)=-\frac{Pl}{2}\left\{3(\frac{x}{l})-1\right\};\quad Q(x)=\frac{dM}{dx}=-\frac{3}{2}P$$

となる。これで、2つの部材の曲げモーメントとせん断力が全て決定した。これらを図13に示す。

反力も節点での力の釣合より図14のように得られる。求めた反力を検証するため、荷重と反力の釣合を考えてみよう。上下方向の力の釣合は、同図に示すように容易に成立することが分かる。また、節点1を中心とするモーメントを計算すると次式となり、モーメントの釣合が成立する。

$$\frac{Pl}{2}-\frac{5}{2}P\cdot l+P\cdot 2l\quad\rightarrow\quad 0$$

節点2−3間の梁のたわみ及び回転角は、節点2の回転角 $\theta_2=Pl^2/4EI$ を用いると、次式となる。

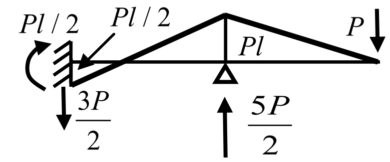
$$v_2(x)=\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\right\}+\theta_2\cdot x=\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\right\}+\frac{Pl^3}{4EI}\frac{x}{l}$$

$$\theta_2(x)=\frac{dv_2}{dx}=\frac{Pl^2}{2EI}\left\{2(\frac{x}{l})-(\frac{x}{l})^2\right\}+\frac{Pl^2}{4EI}\rightarrow\theta_2(l)=\frac{Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{4EI}=\frac{3Pl^2}{4EI}$$

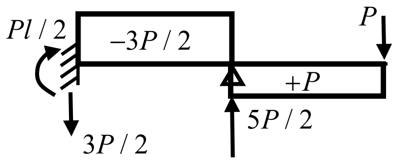
先端3の変位 δ と回転角 θ_3 は、上式に $x=l$ を代入して求める。

$$\delta=v_2(l)=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^3}{4EI}=\frac{7Pl^3}{12EI};\quad \theta_3=\theta_2(l)=\frac{Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{4EI}=\frac{3Pl^2}{4EI}$$

求めた変位分布と回転角の分布を図15に示す。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 13 片持ちで中央に支持のある梁の断面力図

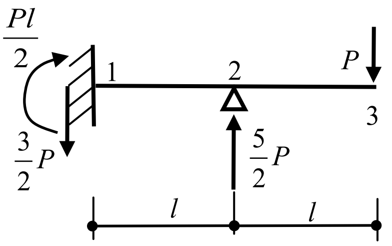
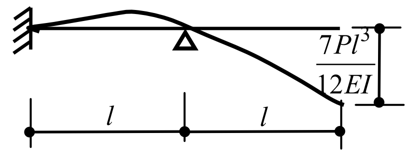
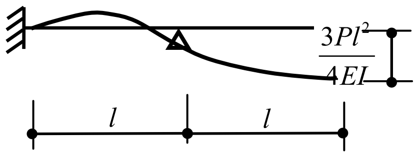


図 14 反力と荷重の釣合



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 15 変位図と回転角図