基礎６６話 No.2　一端固定・他端ピン支持梁＋中央集中荷重

付 16 話参照
ex65_1; ex65_2

今回は、前回の続きで図1に示す構造物の応力解析についてお話しする。前回では、梁の微分方程式を解いて、断面力分布を求めた。ここでは、骨組の変位やたわみを求める。たわみの最大値は、回転角がゼロの位置で与えられる。その位置も既に求めたが、$x=0$ と $x>l$ の値は意味を成さないので、$x/l=(15-\sqrt{33})/16=0.578$ の値を用いる。この値をたわみ関数に代入することによって、たわみの最大値が次のように得られる。

$$v_{\max}=v(0.578l)=0.26\frac{p_w l^4}{48EI}=\frac{2.08 p_w l^4}{384EI}$$

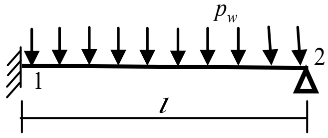


図 1 等分布荷重を受ける一端固定・一端ピン支持梁

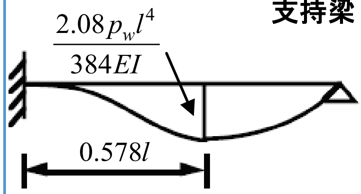
回転角の最大値は、ピン支持端と極値に生じる。回転角の極値は、この関数の接線勾配がゼロとなる位置、つまり、曲げモーメントがゼロとなる位置である。まず、曲げモーメント関数を用いてこの位置を求める。

$$(4(\frac{x}{l})-1)((\frac{x}{l})-1)=0 \rightarrow \quad \frac{x}{l}=\frac{1}{4}$$

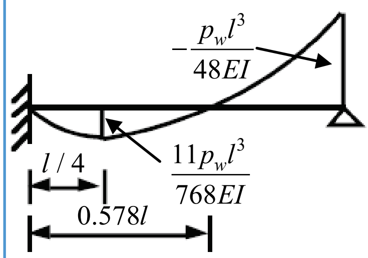
ピン支持端と上の位置の回転角の大きさは、次式で与えられる。

$$\theta(l)=\frac{p_w l^3}{48EI}(8-15+6)=-\frac{p_w l^3}{48EI}$$

$$\theta(l/4)=\frac{p_w l^3}{48EI}(8(\frac{1}{4})^3-15(\frac{1}{4})^2+6(\frac{1}{4}))=\frac{p_w l^3}{192EI}(\frac{1}{2}-\frac{15}{4}+6)=\frac{p_w l^3}{192EI}\cdot\frac{11}{4}=\frac{11p_w l^3}{768EI}$$



(a) たわみ分布



(b) 回転角分布

図 4 等分布荷重を受ける一端固定・他端ピン支持梁の断面力図

2）一端固定・他端ピン支持梁＋中央集中荷重　ex65_2

続いて、図 5 に示す一端固定、他端ピン支持に中央集中荷重が加わる不静定梁について、載荷点の鉛直変位及び断面力分布を求めてみよう。ここでは、前の手法とは少し異なった方法で鉛直変位を求める。基本構造である片持ち梁の解を利用する。基本構造における梁先端のたわみは既に求めている。まず、図 5 のピン支持部の鉛直反力を X で仮定する。次に、下図のように 2 つの片持ち梁に分けて考える。

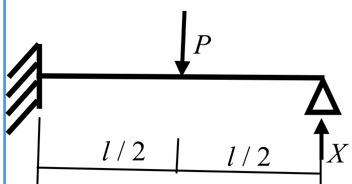


図 5 梁中央集中荷重を受ける一端固定、他端ピン支持梁

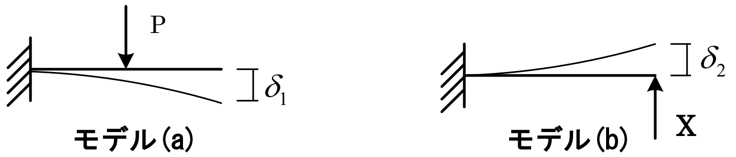


図 6 2 つの片持ち梁に分ける

各片持ち梁先端の変位を次のように求める。この値は、基礎 51 話で既に求めており、これを利用する。ここで、δ_1', θ' は各々荷重直下の変位と回転角である。

$$\delta_1=\delta_1'+\theta'\frac{l}{2}=\frac{P}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\frac{P}{2EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l}{2}=\frac{5Pl^3}{48EI};\quad \delta_2=-\frac{Xl^3}{3EI}$$

先端に集中荷重を受ける片持ち梁の先端の変位は、

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI}$$

また先端の回転角は、回転角の式に $x=l/2$ を代入することで次式となる。

$$\theta=\frac{Pl^2}{2EI}$$

図 5 から分かるように、右端はピン支持なので鉛直変位は生じない。そのため、$\delta_1+\delta_2=0$ の関係が成り立つ。2 つの片持ち梁先端の鉛直方向たわみを用いて、上の関係より X の値が求められる。

$$\delta_1+\delta_2=0\rightarrow\ \frac{5Pl^3}{48EI}-\frac{Xl^3}{3EI}=0\rightarrow\quad X=\frac{5}{16}P$$

先端に集中荷重 X を受ける片持ち梁の中央の変位 δ_2' は第 51 話の片持ち梁のたわみ関数より、以下のように求められる。

$$\delta_2'=-\frac{X}{6EI}(\frac{l}{2})^3+\frac{Xl}{2EI}(\frac{l}{2})^2=\frac{5l^3}{48EI}X$$

一端固定、他端ピン支持不静定梁の変形は、図 6 に示す 2 つの片持ち梁の変形状態の和で与えられる。この 2 つの片持ち梁の中央変位を各々 δ_1' と δ_2' とすると、一端固定、他端ピン支持の不静定梁載荷点の変位 δ は次式となる。

$$\delta=\delta_1'-\delta_2'=\frac{P}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3-\frac{5l^3}{48EI}\cdot\frac{5}{16}P=\frac{7Pl^3}{768EI}$$

曲げモーメント及びせん断力図は、変位と同様に図 6 に示す 2 つの片持ち梁の応力を足し合わせて求める。 以下に両モデルのたわみと曲げモーメント図及びせん断力図を示す。

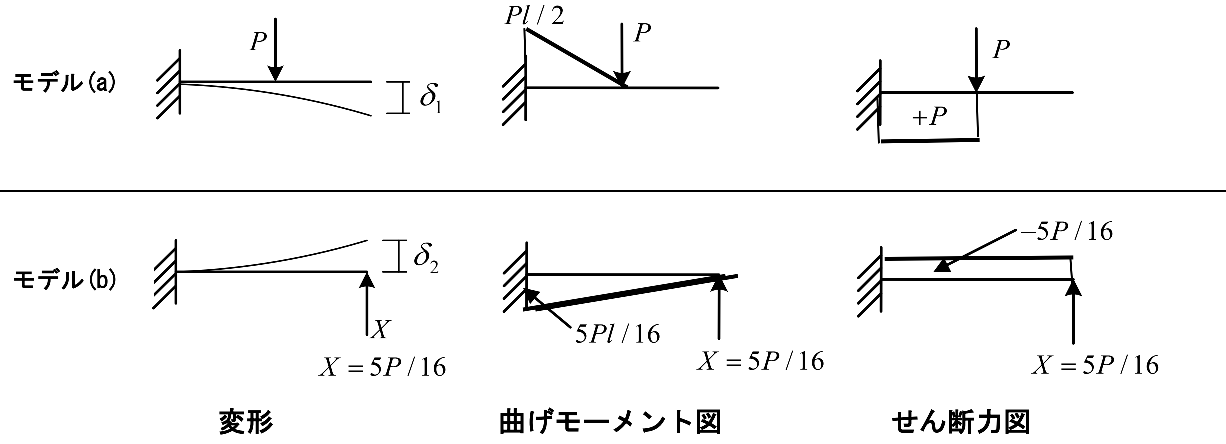


図 7 2 つのモデルのたわみ、曲げモーメント図とせん断力図

上記の 2 つのモデルの和を取ると、一端固定、他端ピン支持に中央集中荷重を受けるモデルのたわみと曲げモーメント図、及びせん断力図が次のように得られる。

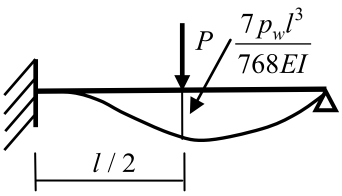


図 8 梁のたわみ曲線

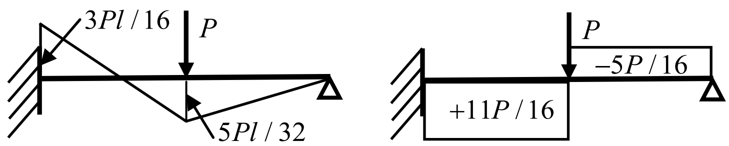


図 9 曲げモーメント図とせん断力図

次回は、もう少し複雑な不静定構造の応力解析を実施し、解析手順をより深く理解しよう。