基礎６５話 No.1　一端固定・他端ピン支持梁＋等分布荷重

付 16 話参照
ex65_1

前回は、基本構造である両端固定支持梁の応力解析を行った。今回以降は、基本構造を少しだけ複雑にした骨組について、断面力と変位やたわみを求める。ここではまず、図 1 に示す一端固定・他端ピン支持の不静定梁が等分布荷重を受ける梁の応力解析を行い、断面力の分布とたわみ曲線、あるいは最大曲げモーメントや最大変位を求める。

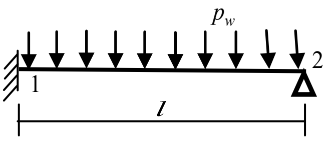


図 1 等分布荷重を受ける一端固定・他端ピン支持梁

1）一端固定・他端ピン支持梁＋等分布荷重　ex65_1

今回の不静的梁の解析でも、基本構造と同じで、次の 4 階の微分方程式を使用する。座標系として原点は節点 1 とし、x は材軸の節点 2 方向、y は下方向を正とする。

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = p_w$$

ここで、$p_w(x)$ は分布荷重を表す関数であるが、ここでは等分布荷重であるため定数となる。解析方法及び解析手順は、基本構造と全く同一、単に境界条件が異なるのみである。

上式を解くために、両辺を 4 回積分する。これについては既にお話ししたので、そちらを参照されたい。ここでは、たわみの関数と回転角の関数を示す。

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{p_w}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIv(x) = \frac{p_w}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

上のたわみ式には積分定数が4つあり、4つの境界条件が必要となる。まず、梁の左端は固定であるため、その点の変位と回転角（勾配）は、次に示すように共にゼロとなる。

$$v(0) = 0; \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

上の条件より、積分定数が2つ決まることになる。

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = C_3 = 0; \quad EIv(0) = C_4 = 0$$

また、右端はピン支持であるため、

$$v(l) = 0 \rightarrow \quad v(l) = \frac{1}{24EI}(p_wl^4 + 4C_1l^3 + 12C_2l^2) = 0$$

として、変位に対する境界を与え、他のひとつは応力境界で与える。ここでは、ピン支持であることから、曲げモーメントがゼロとなる。曲げモーメントによる境界条件は、次式で与えられる。

$$M(l) = -EI\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \rightarrow \quad M(l) = -\frac{p_w}{2}l^2 - C_1l - C_2 = 0$$

求めた両境界条件を連立にして、C_1, C_2 を求めると、両積分定数は次式となる。

$$C_1 = -\frac{5p_w l}{8};\quad C_2 = \frac{p_w l^2}{8}$$

これで、積分定数は全て決定したので、たわみや断面力が、これらの積分定数を該当する関数に代入することで得られる。まず、断面力を求めてみよう。曲げモーメントとせん断力は、

$$M(x) = -EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p_w}{2}x^2 + \frac{5p_w}{8}lx - \frac{p_w}{8}l^2 = \frac{p_w l^2}{8}\left(-4(\frac{x}{l})^2 + 5(\frac{x}{l}) - 1\right) = -\frac{p_w l^2}{8}\left(4(\frac{x}{l}) - 1\right)\left((\frac{x}{l}) - 1\right)$$

$$Q(x) = -p_w x + \frac{5}{8}p_{wl}l = \frac{p_w l}{8}(-8\frac{x}{l} + 5)$$

となり、曲げモーメントは x に関する2 次式となる。求めた曲げモーメントとせん断力を図2に示す。

梁の両端では、曲げモーメントは、

$$M(0) = -\frac{p_w l^2}{8};\quad M(l) = -\frac{p_w l^2}{8}(4-1)(1-1) = 0$$

となり、$x = l/4$ でもゼロとなることが分かる。曲げモーメントの最大値は、せん断力がゼロとなる位置を求め、

$$Q(x) = \frac{p_w l}{8}(-8\frac{x}{l} + 5) = 0; \rightarrow \quad x = \frac{5}{8}l$$

曲げモーメント関数に代入すれば以下のように得られる。

$$M_{\max} = M(\frac{5l}{8}) = \frac{p_w l^2}{8}\left(-4(\frac{5}{8})^2 + 5(\frac{5}{8}) - 1\right) = \frac{9}{128}p_w l^2$$

また、梁両端でのせん断力は、次のように得られる。

$$Q(0) = \frac{5}{8}p_w l;\quad Q(l) = \frac{p_w l}{8}(-8+5) = -\frac{3}{8}p_w l$$

反力は、支持点での力の釣り合いから、

$$V_1 = Q(0) = \frac{5p_w l}{8};\quad V_2 = -Q(l) = \frac{3p_w l}{8};\quad M_1 = -M(0) = \frac{p_w l^2}{8};\quad M_2 = 0$$

として求められる。このように、不静定構造物では、部材の断面力との釣合より、反力を最後に求めることになる。

次に、たわみを求めることにしよう。たわみの式及び回転角の式に積分定数を代入し、整理すると以下の式が得られる。

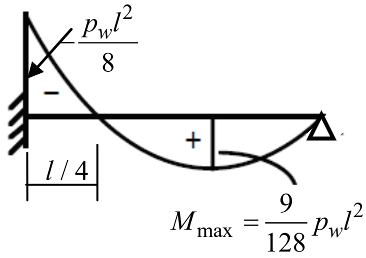
$$v(x) = \frac{p_w l^4}{48EI}\left(2(\frac{x}{l})^4 - 5(\frac{x}{l})^3 + 3(\frac{x}{l})^2\right)$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{p_w l^3}{48EI}\left(8(\frac{x}{l})^3 - 15(\frac{x}{l})^2 + 6(\frac{x}{l})\right)$$

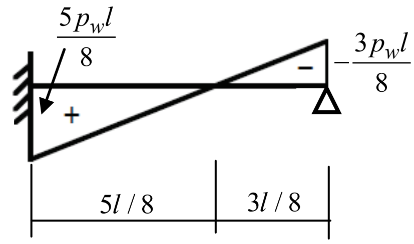
変位の最大値は、回転角がゼロの位置で与えられる。

$$8(\frac{x}{l})^3 - 15(\frac{x}{l})^2 + 6(\frac{x}{l}) = 0 \rightarrow \quad x/l = 0, x/l = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}$$

ただし $x = 0$ と $x > l$ の値は意味をなさない。以降は次回お話しする。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図

図 2 等分布荷重を受ける一端固定・他端ピン支持の不静定梁の断面力

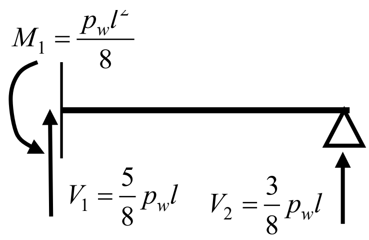


図 3 不静定梁の反力

荷重と反力との上下方向の釣合は、
$5p_w l/8 + 3p_w l/8 - p_w l \rightarrow 0$
となり、節点 1 を中心とするモーメントの釣合は次式となる。
$M_1 = p_w l \cdot l/2 - 3p_w l \cdot l/8 - p_w l^2/8 \rightarrow 0$