基礎６４話 No.2　両端固定梁＋等分布荷重

付 16 話参照
ex64_1

2）不静定な基本構造である両端固定支持梁＋等分布荷重 ex64_1

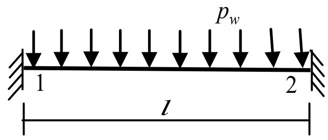


図 4 等分布荷重を受ける両端固定梁

前回の続きで、図 4 に示す両端固定支持梁に等分布荷重が加わる場合の応力解析を行う。等分布荷重 p_w を受ける梁の微分方程式は、

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=p_w$$

で与えられ、上の両辺を4回積分すると、

$$EI\frac{dv^3}{dx^3}=p_wx+C_1 \to \quad -Q(x)$$

$$EI\frac{dv^2}{dx^2}=\frac{1}{2}p_wx^2+C_1x+C_2 \to \quad -M(x)$$

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{1}{6}p_wx^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3 \to \quad EI\theta(x)$$

$$EIv=\frac{1}{24}p_wx^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

となる。境界条件として、梁両端が固定であることより、以下の4つの条件が得られる。

$$v(0)=0;\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0;\quad v(l)=0;\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=l}=0$$

まず、$x=0$ における節点1のたわみと回転角に対して、境界条件を適用すると、積分定数 C_3,C_4 が決定する。

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=C_3=0;\quad EIv(0)=C_4=0$$

続いて、$x=l$ の節点2のたわみと回転角に境界条件を適用する。

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=l}=\frac{1}{6}p_wl^3+\frac{1}{2}C_1l^3+C_2l=0 \to \frac{1}{6}p_wl^2+\frac{1}{2}C_1l+C_2=0$$

$$EIv(l)=\frac{1}{24}p_wl^4+\frac{1}{6}C_1l^3+\frac{1}{2}C_2l^2=0 \to \frac{1}{12}p_wl^2+\frac{1}{3}C_1l+C_2=0$$

上式を連立にして積分定数 C_1,C_2 を求めると、以下となる。

$$C_1=-\frac{p_wl}{2};\quad C_2=\frac{p_wl^2}{12}$$

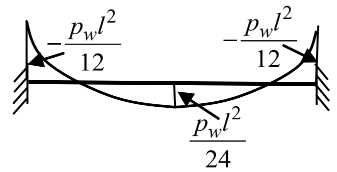
今回は、前回と異なり、断面力から求めてみよう。求めた積分定数より、曲げモーメント関数は次式で与えられる。

$$M(x)=-EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{p_w}{2}x^2+\frac{p_w}{2}lx-\frac{p_w}{12}l^2=\frac{p_wl^2}{12}\left(-6(\frac{x}{l})^2+6(\frac{x}{l})-1\right)$$

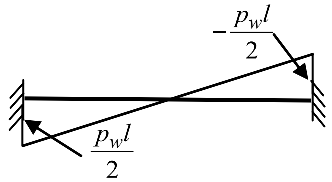
上式より、梁端部及び中央の曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$M_e=M(0)=-\frac{p_wl^2}{12};\quad M_c=M(\frac{l}{2})=\frac{p_wl^2}{12}\left(-6(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})-1\right)=\frac{p_wl^2}{24}$$

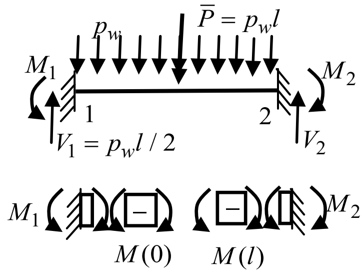
次に、曲げモーメントと同様に、せん断力関数と最大せん断力は、次式



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 外力と反力

図 5 等分布荷重を受ける両端固定梁の断面力図

で与えられる。

$$Q(x) = -p_w x + \frac{p_w l}{2} = \frac{p_w l}{2}\left(-2(\frac{x}{l})+1\right) \to \quad Q_{\max} = Q(0) = \frac{p_w l}{2}; Q(l) = -\frac{p_w l}{2}$$

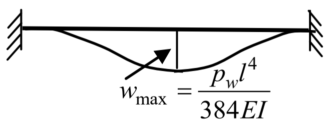
反力は、図5(c)の両端の断面力との釣合より、以下のように求められる。

$$V_1 = V_2 = \frac{p_w l}{2}; \quad H_1 = H_2 = 0; \quad M_1 = M_2 = \frac{p_w l^2}{12}$$

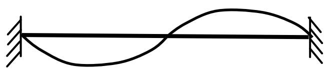
最後に、梁のたわみと回転角は、求めた積分定数をたわみの式と回転角の式に代入すると、

$$v(x) = \frac{p_w}{EI}(\frac{x^4}{24} - \frac{lx^3}{12} + \frac{l^2x^2}{24}) = \frac{p_w l^4}{24EI}\left((\frac{x}{l})^4 - 2(\frac{x}{l})^3 + (\frac{x}{l})^2\right)$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{p_w}{EI}(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{4} + \frac{l^2x}{12}) = \frac{p_w l^3}{12EI}\left(2(\frac{x}{l})^3 - 3(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})\right)$$



(a) たわみ曲線



(b) 回転角分布

図 6 等分布荷重を受ける両端固定梁のたわみと回転角分布

たわみの最大値は部材中央に生じ、たわみ式より、

$$v_{\max} = v(l/2) = \frac{p_w l^4}{24EI}\left((\frac{1}{2})^4 - 2(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2\right) = \frac{p_w l^4}{384EI}$$

となる。単純梁と比較すると、最大たわみが1/5になっている。

回転角の最大値は、関数の微分がゼロとなる位置を求め、その値を回転角の関数に代入して求める。回転角の微分がゼロとなる位置は、曲げモーメントがゼロとなる位置であることから、

$$6X^2 - 6X + 1 = 0 \to X = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \leftarrow X = \frac{x}{l}$$

上の2点の値を回転角の式に代入すると、最大回転角が得られる。

$$\theta(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}) = \frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\left(2(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6})^2 - 3(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}) + 1\right)$$

$$= \frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{18}(3\pm\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{3}) + 1\right) = \frac{p_w l^3}{12EI}\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}(\frac{1}{6}(1\mp\sqrt{3})) = \frac{\mp\sqrt{3}p_w l^3}{216EI}$$

以下に基本構造である単純梁と固定支持梁の最大曲げモーメントとたわみなどをまとめる。基本中の基本なので良く覚えておこう。

R38：単純梁と固定支持梁の曲げモーメントと最大たわみ

1:中央集中荷重＋単純梁

$$Q_{\max} = \frac{P}{2}; \quad M_{\max} = \frac{Pl}{4}; \quad \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{16EI}; \quad v_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

2: 等分布荷重＋単純梁

$$Q_{\max} = \frac{p_w l}{2}; \quad M_{\max} = \frac{p_w l^2}{8}; \quad \theta_{\max} = \frac{p_w l^3}{24EI}; \quad v_{\max} = \frac{5p_w l^4}{384EI}$$

3: 中央集中荷重＋固定支持梁

$$Q_{\max} = \frac{P}{2}; \quad M_e = \frac{Pl}{8}; \quad M_c = \frac{Pl}{8}; \quad \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{64EI}; \quad v_{\max} = \frac{Pl^3}{192EI}$$

4: 等分布荷重＋固定支持梁

$$Q_{\max} = \frac{p_w l}{2}; \quad M_e = \frac{p_w l^2}{12}; \quad M_c = \frac{p_w l^2}{24}; \quad \theta_{\max} = \frac{\sqrt{3}p_w l^3}{216EI}; \quad v_{\max} = \frac{p_w l^4}{384EI}$$