基礎６３話 No.1　両端固定梁＋中央集中荷重 断面力と最大変位

付 16 話参照
ex63_1

今回から不静定構造の応力解析についてお話しする。不静定の基本構造は両端固定支持梁であり、荷重は中央集中荷重と等分布荷重である。この 2 つのモデルは非常に重要であり、その結果を理解すると共に、得られた値を覚えるようにしよう。

1）不静定な基本構造である両端固定梁＋中央集中荷重　ex63_1

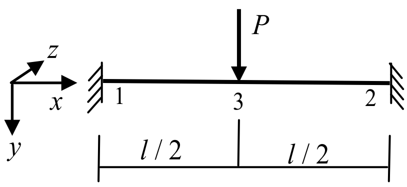


図 1 中央集中荷重＋両端固定支持梁

前回お話した 4 階の微分方程式の解を用いて、断面力分布とたわみ関数、及び回転角関数を求める。集中荷重の場合、梁全体では通常の関数として扱うことができないため、ここでも梁を 2 つに分けて解を求める。ただ、対称形状で対称荷重であるため、対称応力・対称変形状態となる。そのため、半分の解を求めるのみで良い。静定構造では、まず反力を求めたが、不静定構造では反力は部材の断面力が決定した後、最後に支持点での断面力との釣合より求める。

このモデルでは分布荷重がないことから、4 階の微分方程式の解は以下のようになる。

$$EI\frac{d^3v}{dx^3}=C_1;\quad EI\frac{d^2v}{dx^2}=C_1x+C_2;\quad EI\frac{dv}{dx}=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3;$$

$$EIv(x)=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

次に、以下の 4 つの境界条件より積分定数を決定する。境界条件は左端と中央の節点 3 で以下のように与える。境界条件の上 2 式は左端が固定であることから、また 3 番目は構造が対称で部材中央の回転角がゼロとなることから得られる。最後の境界条件は、図 2 のように梁中央点での上下方向の力の釣合、つまり荷重とせん断力との力の釣合から得られる。

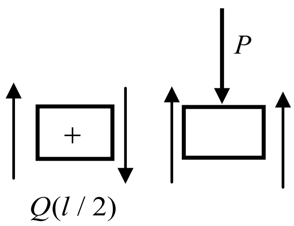


図 2 梁中央での外力とせん断力との力の釣合

$$v(0)=0;\quad \theta(0)=\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0$$

$$\theta\left(\frac{l}{2}\right)=\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}}=0;\quad Q\left(\frac{l}{2}\right)=-EI\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{P}{2}$$

上式の上 2 式より、$C_4=C_3=0$ となる。さらに、上の左式より、

$$EI\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{l^2C_1}{8}+\frac{l}{2}C_2=0$$

となり、また、同じくの右式より次式が得られる。

$$EI\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\frac{l}{2}}=C_1=-\frac{P}{2}$$

上 2 式より、残りの積分定数が $C_2=Pl/8$ となる。

たわみ関数は求めた全ての積分定数を代入すると、以下のようになる。

$$v(x) = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{Pl}{16EI}x^2 = \frac{Pl^3}{48EI}\left(-4(\frac{x}{l})^3 + 3(\frac{x}{l})^2\right)$$

載荷点における最大たわみ $v_{\max}$ は、上式に $x = l/2$ を代入することで、次のように単純梁のたわみの $1/4$ として求められる。

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}\left(-4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2\right) = \frac{Pl^3}{192EI}$$

回転角は、たわみと同様、求めた積分定数を代入すると、次式となる。

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}Px^2 + \frac{Pl}{8}x) = \frac{Pl^2}{8EI}(-2(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l}))$$

上式は、 $x = 0$ 及び $x = l/2$ 、つまり材端と梁中央でゼロとなり、また、最大値は、上式の微分である曲げモーメントがゼロの位置で最大回転角となる。この位置 $x = l/4$ (後で曲げモーメント関数より求める)を上式に代入すると、回転角の最大値は以下の値となる。

$$\theta_{\max} = \theta(\frac{l}{4}) = \frac{Pl^2}{8EI}(-2(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})) = \frac{Pl^2}{64EI}$$

次に、曲げモーメントとせん断力は、前回お話ししたように、微分方程式の積分途中で求めた関数に、得られた積分定数を代入することで、得られる。

$$M(x) = -EI\frac{d^2v}{dx^2} = -C_1x - C_2 = -\frac{Pl}{8} + \frac{P}{2}x = -\frac{Pl}{8}\left(1 - 4(\frac{x}{l})\right)$$

$$Q(x) = -EI\frac{d^3v}{dx^3} = -C_1 = \frac{P}{2}$$

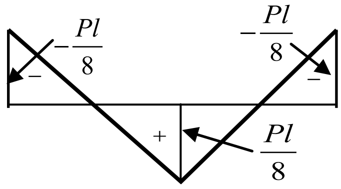
曲げモーメント関数は一次式であり、材端あるいは梁中央位置で最大モーメントとなる。この 2 つの曲げモーメントを各々、材端モーメント M_e と中央モーメント M_c と呼ぶ。

$$M_e = -\frac{Pl}{8};\quad M_c = \frac{Pl}{8}$$

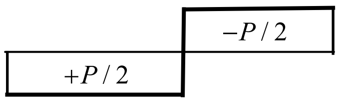
せん断力は荷重が加わっていない領域では定数であり、荷重直下で不連続となる。この位置での不連続は、図 2 に示される荷重との釣合より生じる。得られた式は、先に述べたように解析モデルの左半分の値を与えており、右半分は、構造が対称であることから、右半分にコピーすれば良い。最後に、反力は両端の曲げモーメントとせん断力から次のように求められる。

$$V_1 = V_2 = \frac{Pl}{2};\quad H_1 = H_2 = 0;\quad M_1 = M_2 = \frac{Pl}{8}$$

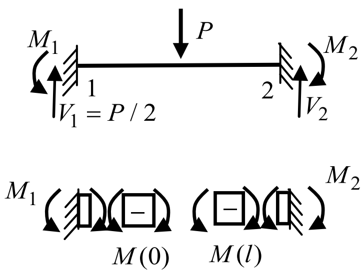
同じ荷重状態の単純梁では、曲げモーメントは両端でゼロ、中央で $M_0 = Pl/4$ となる。両端を固定支持とすると曲げモーメントの形状はそのままで、半分せり上がり、材端に曲げモーメントが生じることになる。



(a) 曲げモーメント図



(b) せん断力図



(c) 外力と反力

図 3 中央集中荷重＋両端固定梁の断面力図