基礎６２話　不静定構造の応力解析
不静的次数を求める

今回から不静定構造の応力解析について学ぶ。ベルヌーイ・オイラー梁理論によって、曲げを受ける梁の微分方程式は次の 2 式となり、連立微分方程式となる。第 1 式の右が断面力の釣合を表し、第 2 式が梁の微分方程式である。

$$\frac{dM}{dx}=Q(x);\quad \frac{dQ}{dx}=-p_w(x)\rightarrow\frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x);$$
$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$$

静定構造では、断面力の釣合式のみで曲げモーメントやせん断力が決定し、梁の材料特性である断面二次モーメント I やヤング係数 E に依存しない。つまり、任意の材料や断面形状の梁を用いても、断面力分布は変わらないことを意味する。応力解析では、断面力分布、特に曲げモーメント関数が決まった後、梁の微分方程式を用いてたわみや回転角を求めることになる。

一方、構造が不静定の場合、両者を同時に、つまり連立微分方程式として解を求めなければならない。ただし、断面が一定であると、上の下式の両辺を 2 回微分し、上式に代入して曲げモーメントを削除することで、次の 4 階の微分方程式用いることもできる。

$$\frac{d^4v}{dx^4}=-\frac{1}{EI}\frac{d^2M}{dx^2};\quad \frac{d^2M}{dx^2}=-p_w(x)\rightarrow\quad EI\frac{d^4v}{dx^4}=p_w(x)$$

上右の微分方程式を解くのは容易である。以下のように上式の両辺を 4 回積分すれば解が得られ、たわみが求められる。

$$EI\frac{d^3v}{dx^3}=\int p_w dx+C_1$$
$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=\int\int p_w dxdx+C_1x+C_2$$
$$EI\frac{dv}{dx}=\int\int\int p_w dxdxdx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$
$$EIv(x)=\int\int\int\int p_w dxdxdxdx+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

後は、4 つの積分定数 C_1,C_2,C_3,C_4 を、4 つの境界条件を用いて決定すれば良い。ここで、上記 4 つの式が何を意味するのか、考えてみよう。最後の式はたわみを表し、両辺を EI で割るとたわみ関数が得られる。

$$v(x)=\frac{1}{EI}\{\int\int\int\int p_w dxdxdxdx+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4\}$$

部材の回転角は、法線保持の仮定より、 $\theta(x)=dv/dx$ であることから、

第 3 式より、次のようになる。

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\{\iiint p_w dxdxdx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3\}$$

さらに、

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-M;\quad \frac{dM}{dx}=Q(x)$$

であることから、第 2 式と第 1 式より、

$$M(x)=-EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\{\iint p_w dxdx+C_1x+C_2\}$$

$$Q(x)=\frac{dM}{dx}=-EI\frac{d^3v}{dx^3}=-\int p_w dx+C_1$$

として、断面力が求められる。後は、境界条件として、梁両端の変位と回転角、及び曲げモーメントとせん断力の値から、4 つの積分定数を求める。**前者 4 つを変位境界、後者 4 つを応力境界と呼ぶ**。境界 8 つの中から 4 つを選択し、4 つの未定積分定数を決めることになる。

次に、構造物の安定・不安定、あるいは静定・不静定について学習しよう。力の釣合から、支持点反力や部材応力が決定される構造物を静的構造と呼ぶ。これについては既に学んだ。以後は、この構造以外について、つまり不静定構造について学ぶことにしよう。

平面骨組の静定・不静定に関する判別式を覚えることにしよう。

R37：静定・不静定に関する判別式

以下に示す判別式の値 m（この値を不静定次数とも呼ぶ）がゼロの場合、その骨組は静的となる。

$$m=s+r+n-2k$$

ここで、m：不静定次数、s：部材総数、r：（節点に剛接合された部材－1）の値の総数、n：反力総数、k：節点総数を表す。不静定次数は、$m\geq 1$：不静定　$m=0$：静定　$m<0$：不安定を意味する。

上記の判別式を用いて、簡単な構造物の静定・不静定を検証しよう。

例 1）単純梁

$m=1+0+3-2\times 2=0$　⇒静定構造物

s = 1 ; r = 0 ; n = 3 ; k = 2

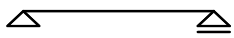

図 1 単純梁の不静定次数

例 2）門型ラーメン

$m=3+(1+1)+4-2\times 4=1$　⇒1 次不静定構造物

s = 3（部材総数 3）; r = 2（1+1）
n = 4（両支持点共ピン支持）; k = 4（4 節点）

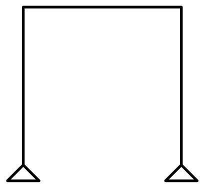

図 2 門型ラーメンの不静定次数

不静定構造の基本構造は両端固定支持梁であり、中央集中荷重と等分布荷重が加わる場合である。この 2 つのモデルは非常に重要であり、解析手法を理解すると共に、断面力分布やたわみなどを覚えよう。